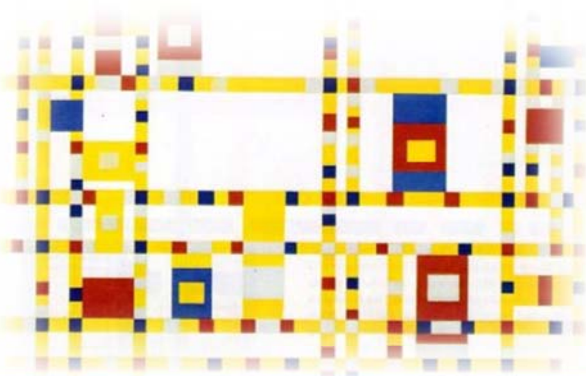
命题逻辑

Propositional Logic

高晓沨 (Xiaofeng Gao)

Department of Computer Science
Shanghai Jiao Tong Univ.

目录



数理逻辑概论

Introduction to Mathematical Logic

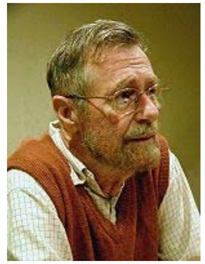
什么是数理逻辑？

- 逻辑学(Logic)
  - 研究人的思维形式和规律的科学. 由于研究的对象和方法各有侧重而又分为形式逻辑、辩证逻辑和数理逻辑
- 数理逻辑(Mathematical Logic)
  - 用数学方法研究推理，是研究推理中前题和结论之间的形式关系的科学
    - 推理：由一个或几个判断推出一个新判断的思维形式
    - 数学方法：建立一套表意符号体系，对具体事物进行抽象的形式研究的方法。因此数理逻辑又称符号逻辑

数理逻辑与计算机科学

- 1946年，德国数学家Von Neumann提出计算机模型，根植于数理逻辑、图林机与布尔代数。
  - 图灵机：数字电子计算机的抽象雏形
  - 布尔代数：设计数字电子计算机的数学工具
- 许多计算机科学分支涉及数理逻辑理论
  - 计算机科学的核心算法
  - 程序设计语言
  - 程序设计方法学
  - 计算复杂性理论

戴克斯特拉（Dijkstra）



- **Edsger Wybe Dijkstra (1930-2002)**
  - 最伟大的计算机科学家(之一?)
  - 成就很多，如图论中的**Dijkstra**最短路径算法
  - “搞了这么多年软件，错误不知犯了多少，现在觉悟了。我想，假如我早年在数理逻辑上好好下点功夫的话，我就不会犯这么多的错误，不少东西逻辑学家早就说了，可我不知道。要是我能年轻二十岁的话，就要回去学逻辑。”

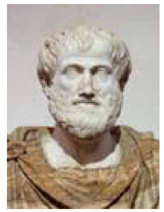
数理逻辑的发展历程

- 数理逻辑前史时期——古典形式逻辑时期
- 数理逻辑初创时期——逻辑代数时期
- 数理逻辑奠基时期
- 数理逻辑发展初期
- 数理逻辑现代发展时期

古典形式逻辑时期

- 亚里士多德的三段论 (*syllogism*)
  - 从两个前提推出一个结论的逻辑论证形式:

大前提 (major premise)	人都是两足动物
小前提 (minor premise)	希腊人都是人
结论 (conclusion)	希腊人都是两足动物



Aristotle (384BC-322BC)

- 斯多阿学派(*Stoics*)的命题逻辑
  - Zeno of Citium创立的哲学派别(301BC)
  - Chrysippus发展了*Stoic logic*
- 中世纪的形式逻辑

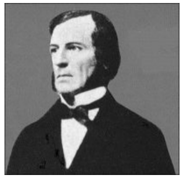
Zeno (334BC-262BC)

逻辑代数时期

❖ 数理逻辑创始人——莱布尼兹
- 首先使用"数理逻辑"这个术语
- 主导思想：理性演算，普遍语言
- 理想：推理归结为符号计算

Gottfried W. Leibniz
1646-1716

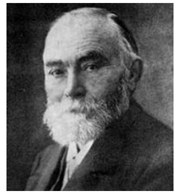
❖ 逻辑代数——布尔
- 《逻辑的数学分析:论演绎推理的演算法》(1847年发表)
- 首次应用数学(代数)方法研究逻辑，发明了布尔代数(逻辑代数，命题代数，布尔逻辑)



George Boole
(1815-1864)

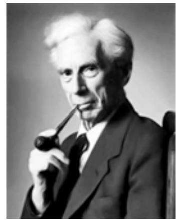
数理逻辑奠基时期

❖ 逻辑演算的建立和发展 (Frege)
- 第一个公理化谓词逻辑系统
- 自Aristotle以来逻辑的最重要进展
- 基本实现了Leibniz梦想



Friedrich L.G. Frege
(1848-1925，德)

❖ Peano的符号体系与罗素悖论
- 19世纪后期的公理化运动:去除基于直觉或经验的朴素概念的模糊之处，使数学严密化
- 随后发现Cantor集合论的一些悖论:如1902年的罗素悖论——基石崩塌



Bertrand Russell
(1872-1970，英)

解决危机的四大派别

❖ Russell：逻辑主义，主张从逻辑推出数学
- *Principia Mathematica*,1910

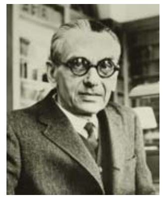
❖ Hilbert：形式主义，对全部数学进行形式，并证明其协调性。
- *将理论置于逻辑演算中加以形式化*

❖ Brouwer：直觉主义。反对排中律，强调构造性。

❖ Zermelo:公理化集合论

数理逻辑发展初期（20世纪三十年代）

❖ 哥德尔
- 完备性定理：证明了一阶谓词演算的完备性
- 不完备性定理：任何足够强的形式系统都有无法证明的真命题. 且系统自己不能证明自己无矛盾.
- 连续统假设的一致性



Kurt Gödel
(1906-1978)

❖ Einstein:自己的工作不再要紧，来研究院只是为了享有和Gödel一起步行回家的特权.

数理逻辑现代发展时期

非经典逻辑演算和四论（20世纪四十年代至今）

❖集合论（公理集合论）
- Zermelo:第一个公理化集合论
- Fraenkel(1922)改进成为经典的ZF集合论
- ZFC公理化体系

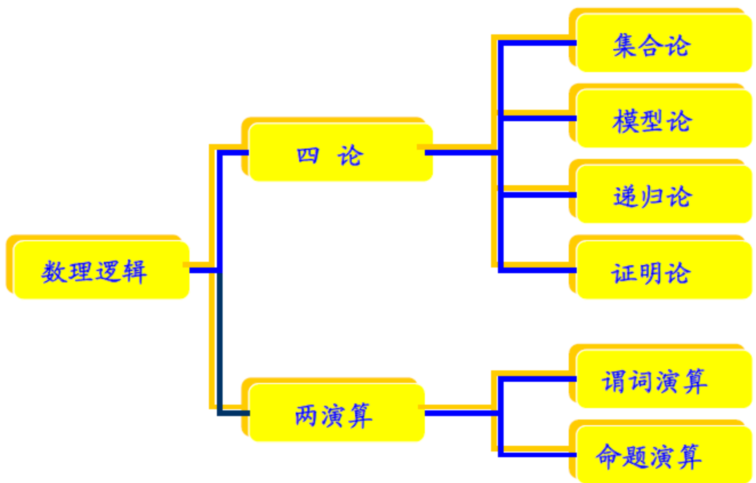
❖模型论（形式语言语法与语义间的关系）
- 建立形式理论的模型，研究模型之间的关系等
- Alfred Tarski奠定了模型论的基础

数理逻辑现代发展时期（2）

❖递归论（可计算性和可判定性）
- 亦称可计算性理论，研究能行可计算的函数
- Gödel:递归函数；
- Alonzo Church(丘奇):λ演算
- Alan Turing(图灵):图灵机

❖证明论（数学本身的无矛盾性）
- 研究数学理论系统的形式证明问题
- Hilbert:首先提出
- Gerhard Gentzen:发展了证明论的重要成果

内容体系



命题逻辑的基本概念

Basic Concepts for Propositional Logic

命题（proposition）

- 命题是一个非真即假(不可兼)的陈述句
  - 陈述句✓；命令句×、疑问句×、感叹句×
  - 命题只有两个取值：真或假。
- 真假命题
  - 凡与事实相符的陈述句为真语句，而与事实不符的陈述句为假语句.
  - 通常用大写字母“T”表示真值为真，用“F”表示真值为假.
- 因为只有两种取值，故命题逻辑又称二值逻辑.

命题举例

(1)“雪是白的”；

√ 陈述，真值为“真”；

(2)“雪是黑的”；

√ 陈述，真值为“假”；

(3)“好大的雪啊”；

× 不是陈述句，不是命题；

(4)“一个偶数可表示成两个素数之和”。

√ 只不过当今尚不知其是真命题还是假命题。

(5)“1+101＝110”。

√ 这是一个数学表达式，相当于一个陈述句，可以叙述为“1加101等于110”，这个句子所表达的内容在十进制范围中真值为假，而在二进制范围中真值为真。可见，这个命题的真值与所讨论问题的范围有关。

命题符号化

- 命题的表示：大写符号P，Q，R，S等
  - P表示“雪是白的”
  - Q表示“北京是中国的首都”
- 命题变项：P表示任一命题时，P就称为命题变项(变元)。
- 命题与命题变项：
  - 命题指具体的陈述句，有确定的真值；
  - 命题变项的真值不定，只当将某个具体命题代入命题变项时，命题变项化为命题，方可确定其真值。

简单命题与复合命题(1)

- 简单命题又称原子命题(Primitive proposition)
  - 不包含任何与、或、非一类联结词的命题。
  - 不可再分割，如“雪是白的”再分割就不是命题了。
  - 例：命题“雪是白的而且1+1＝2”不是简单命题，它可以分割为“雪是白的”以及“1＋1＝2”两个简单命题，联结词是“而且”。
- 在简单命题中，尽管常有主语和谓语，但我们不去加以分割，是将简单命题作为一个不可分的整体来看待，进而作命题演算。在谓词逻辑里，才对命题中的主谓结构进行深入分析。

简单命题与复合命题(2)

- 复合命题(Compound proposition)：把一个或几个简单命题用联结词(如与、或、非等)联结所构成的新的命题。
  - 例：“张三学英语和李四学日语”：由简单命题“张三学英语” “李四学日语”经联结词“和”联结而成。
- 复合命题的真值：依赖于构成该复合命题的各个简单命题的真值以及联结词。
  - 上例中，当两个简单命题真值均为真时，复合命题为真
- 命题逻辑：讨论多个命题联结而成的复合命题的规律性

常用的逻辑联结词

- ¬：否定词(negation) 一元联结词，亦称否定符号。
- 命题P加上否定词形成一个新命题，记作¬P，这个新命题是原命题的否定，读作非P。
- “¬”的真值规定如下：
  - 若命题P为真，那么¬P就为假；
  - 若P为假，那么¬P就为真。

真值表(Truth Table)

P	¬P
T	F
F	T

示例

- “昨天张三去看球赛了”。该命题以P表示；
- “昨天张三没有去看球赛”。该新命题便可用¬P表示.
- 若昨天张三去看球赛了，命题P是真的，那么新命题¬P必然是假的。反之，若命题P是假的，那么¬P就是真的。

合取词∧

- ∧：合取词(Conjunction)，二元命题联结词，亦称合取符号
- 将两个命题P，Q联结起来，构成一个新的命题P∧Q，读作P∧Q的合取，也读作P与Q
- 这个新命题P∧Q的真值与构成它的命题P，Q的真值间的关系，由合取词真值表来规定。

P	Q	P∧Q
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

示例

- P：教室里有10名女同学；
- Q：教室里有15名男同学；
- 命题P∧Q：
  "教室里有10名女同学与15名男同学"。

- A：今天下雨了.
- B：教室里有100张桌子。
- 命题A∧B是：
  "今天下雨了并且教室里有100张桌子".

析取词∨

- ∨：析取词 (Disjunction)，二元命题联结词，亦称析取符号
- 将两个命题P、Q联结起来,构成一个新的命题P∨Q, 读作P、Q的析取, 也读作P或Q。
- 这个新命题P∨Q的真值与构成它的命题P，Q的真值间的关系，由析取词真值表来规定。

P	Q	P∨Q
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

示例

- 例： P：今天刮风。
  Q：今天下雨。
  命题"今天刮风或者下雨"便可由P∨Q来描述了。

- 例： A：2小于3。
  B：雪是黑的。
  A∨B就是命题"2小于3或者雪是黑的"。由于2小于3是真的，所以A∨B必取值为真，尽管"雪是黑的"这命题取假。

蕴涵词→

- →：蕴涵词 (implication)，二元命题联结词
- 将两个命题P、Q联结起来, 构成一个新的命题P→Q, 读作如果P则Q, 或读作P蕴涵Q, 如果P那么Q,
  - P称前件(前项、条件), Q称后件(后项、结论)。
- 规定只有当P为T而Q为F时，P→Q = F。而P = F、Q任意，或P = T、Q = T时P→Q均取值为T。

P	Q	P→Q
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

蕴涵词→ 举例

- P：天下雨了；
- Q：地上是湿的；
- P→Q
  - 如果天下雨，那么地是湿的， T
  - 如果天下雨，那么地不是湿的， F
  - 如果天没有下雨，那么地是湿的。 T
  - 如果天没有下雨，那么地不是湿的。 T

因果关系

- 引入→的目的是希望用来描述命题间的推理，表示因果关系。
- 使用P→Q能描述推理。
  - P→Q为真时，只要P为真必有Q真，而不能出现P真而Q假就够了。
  - P为假时，Q取真取假，并不违背P为真时Q必真。从而仍可规定P为假时，P→Q取真。
- 当P = F时对P→Q真值的不同定义方式将给推理的讨论带来不同的表示形式，也是允许的。

$P \to Q = \neg P \vee Q$

P	Q	$\neg P \vee Q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

在P、Q的所有取值下，P→Q同¬P∨Q都有相同的真值：

$$P \to Q = \neg P \vee Q$$

(真值相同的等值命题以等号联结)。这也说明→可由¬、∨来表示，从逻辑上看“如果P则Q”同“非P或Q”是等同的两个命题。

双条件词↔

- 双条件词(Biconditional)“↔”也是个二元命题联结词，表示“当且仅当”。

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

$(P \to Q) \wedge (Q \to P) = P \leftrightarrow Q$

- 只有当两个命题P、Q的真值相同或说P = Q时，$P \leftrightarrow Q$的真值方为T。而当P、Q的真值不同时，$P \leftrightarrow Q$ = F。
- 若建立$(P \to Q) \wedge (Q \to P)$的真值表，就可发现$(P \to Q) \wedge (Q \to P)$和$P \leftrightarrow Q$有相同的真值，于是

$$(P \to Q) \wedge (Q \to P) = P \leftrightarrow Q$$

例9

- P：ΔABC是等腰三角形
- Q：ΔABC中有两个角相等
- 命题$P \leftrightarrow Q$就是“ΔABC是等腰三角形当且仅当ΔABC中有两个角相等”。显然就这个例子而言$P \leftrightarrow Q$ = T。

合式公式

Well-formed formula

合式公式

- 由命题变项使用联结词可构成任意多的复合命题，如$P \wedge Q$，$P \wedge Q \vee R$，$P \to \neg Q$等。问题是它们是否都有意义呢？
  - 只有一个联结词的命题$\neg P$，$P \wedge Q$，$P \to Q$当然是有意义的。
  - 由两个联结词构成的命题$P \wedge Q \vee R$至少意义不明确，是先作$P \wedge Q$再对R做$\vee$，还是先作$Q \vee R$再对P作$\wedge$呢？ →括号与定序解决
- 由命题变项、命题联结词和圆括号便组成了命题逻辑的全部符号。进一步的问题是建立一个一般的原则以便生成所有的合法的命题公式，并能识别什么样的符号串是合法的（有意义的）？

合式公式(简记为Wff)的定义：

1. 简单命题是合式公式(Well-formed formula)。
2. 如果A是合式公式，那么$\neg A$也是合式公式。
3. 如果A、B是合式公式，那么$(A \wedge B)$，$(A \vee B)$，$(A \rightarrow B)$和$(A \leftrightarrow B)$是合式公式。
4. 当且仅当经过有限次地使用1,2,3所组成的符号串才是合式公式。

判断一个公式是否为合式公式

若判断一个公式是否为合式公式，必然要层层解脱回归到简单命题方可判定。

- $\neg(P \wedge Q)$
- $(P \rightarrow (P \wedge Q))$
- $(((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \leftrightarrow (P \rightarrow R))$是合式公式。
- $\neg P \vee Q \vee$，$((P \rightarrow Q) \rightarrow (\ \wedge Q))$，$(P \rightarrow Q$都不是合式公式。

约定

- 为了减少圆括号的数量，可以引入一些约定
  - 规定联结词优先级的办法，可按$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$的排列次序安排优先的级别。
  - 多个同一联结词按从左到右的优先次序。这样，在书写合式公式时，可以省去部分或全部圆括号。通常采用省略一部分又保留一部分括号的办法，这样选择就给公式的阅读带来方便。如

  $(P \rightarrow (Q \vee R))$可写成$P \rightarrow (Q \vee R)$或$P \rightarrow Q \vee R$。

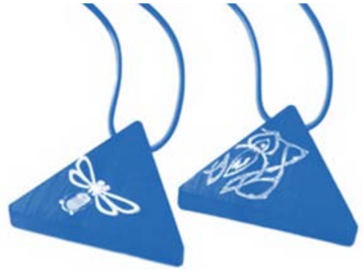
  $(P \rightarrow (P \rightarrow R))$可写成$P \rightarrow (P \rightarrow R)$。
- 命题演算中只讨论合式公式，将合式公式就称作公式。

重言式 /可满足式/矛盾式

- 如果一个公式，对于任一解释I其值都为真，就称为重言式（永真式）。如$P \vee \neg P$是一个重言式。
- 由$\vee$、$\wedge$、$\rightarrow$和$\leftrightarrow$联结的重言式仍是重言式。
- 一个公式，如在某个解释I_0下值为真，则称它是可满足的。如$P \vee Q$，当取$I_0 = (T, F)$，即$P = T$，$Q = F$时便有$P \vee Q = T$，所以是可满足的。
- 重言式当然是可满足的。
- 矛盾式（永假式或不可满足式）：如果一个公式，对于任一解释I值都是假的，便称是矛盾式。如$P \wedge \neg P$就是矛盾式。

三类公式间关系

1. 公式A永真， 当且仅当¬A 永假。
2. 公式A可满足， 当且仅当¬A非永真。
3. 不是可满足的公式必永假。
4. 不是永假的公式必可满足。



等值公式与推理演算

Equivalence Formula and Deduction

等值定理

- 若把初等数学里的＋、－、×、÷等运算符看作是数与数之间的联结词，那么由这些联结词所表达的代数式之间，可建立许多等值式如下：

$$x^2-y^2 = (x+y)(x-y)$$

$$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$$

$$\sin^2 x+\cos^2 x = 1$$

……

在命题逻辑里也同样可建立一些重要的等值式

等值的定义

- 给定两个命题公式A和B， 而$P_1 \ldots P_n$是出现于A和B中的所有命题变项， 那么公式A和B共有2^n个解释， 若对其中的任一解释， 公式A和B的真值都相等， 就称A和B是等值的(或等价的)。记作$A = B$或$A \Leftrightarrow B$。
- 显然，可以根据真值表来判明任何两个公式是否是等值的。

例1: 证明(P∧¬P)∨Q = Q

证明：画出(P∧¬P)∨Q与Q的真值表可看出等式是成立的。

P	Q	P∧¬P	(P∧¬P) ∨Q
F	F	F	F
F	T	F	T
T	F	F	F
T	T	F	T

例2: 证明P∨¬P = Q∨¬Q

- 证明：画出P∨¬P，Q∨¬Q的真值表，可看出它们是等值的，而且它们都是重言式。

- 从例1、2还可说明，两个公式等值并不要求它们一定含有相同的命题变项。
  - 若仅在等式一端的公式里有变项P出现，那么等式两端的公式其真值均与P无关。
  - 例1中公式(P∨¬P) ∨Q与Q的真值都同P无关
  - 例2中P∨¬P，Q∨¬Q都是重言式，它们的真值也都与P、Q无关。

等值定理

定理：对公式A和B，A = B的充分必要条件是A ↔ B是重言式。

- 若A ↔ B为重言式(A、B不一定都是简单命题，可能是由简单命题P_1，…，P_n构成的对A，B的一个解释，指的是对P_1，…，P_n的一组具体的真值设定)，则在任一解释下A和B都只能有相同的真值，这就是定理的意思。

基本等值公式(命题定律)

1. 双重否定律

$\neg\neg P = P$

2. 结合律

$(P \lor Q) \lor R = P \lor (Q \lor R)$

$(P \land Q) \land R = P \land (Q \land R)$

$(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow R = P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R)$

3. 交换律

$P \lor Q = Q \lor P$

$P \land Q = Q \land P$

$P \leftrightarrow Q = Q \leftrightarrow P$

基本等值公式(2)

4. 分配律

$P \lor (Q \land R) = (P \lor Q) \land (P \lor R)$

$P \land (Q \lor R) = (P \land Q) \lor (P \land R)$

$P \to (Q \to R) = (P \to Q) \to (P \to R)$

5. 等幂律(恒等律)

$P \lor P = P$

$P \land P = P$

$P \to P = T$

$P \leftrightarrow P = T$

基本等值公式(3)

6. 吸收律

$P \lor (P \land Q) = P$

$P \land (P \lor Q) = P$

7. 摩根律

$\neg(P \lor Q) = \neg P \land \neg Q$

$\neg(P \land Q) = \neg P \lor \neg Q$

对蕴涵词、双条件词作否定有

$\neg(P \to Q) = P \land \neg Q$

$\neg(P \leftrightarrow Q) = \neg P \leftrightarrow Q = P \leftrightarrow \neg Q$

$= (\neg P \land Q) \lor (P \land \neg Q)$

基本等值公式(4)

8. 同一律

$P \lor F = P$

$P \land T = P$

$T \to P = P$

$T \leftrightarrow P = P$

还有

$P \to F = \neg P$

$F \leftrightarrow P = \neg P$

基本等值公式(4)

9. 零律

$P \vee T = T$

$P \wedge F = F$

还有 $P \rightarrow T = T$

$F \rightarrow P = T$

10. 补余律

$P \vee \neg P = T$

$P \wedge \neg P = F$

还有 $P \rightarrow \neg P = \neg P$

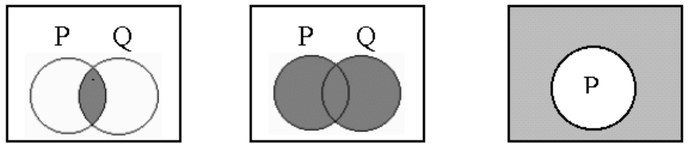
$\neg P \rightarrow P = P$

$P \leftrightarrow \neg P = F$

注：所有这些公式，都可使用直值表加以验证。

Venn图

- 若使用Venn图也容易理解这些等值式，这种图是将P、Q理解为某总体论域上的子集合，而规定$P \wedge Q$为两集合的公共部分(交集合)，$P \vee Q$为两集合的全部(并集合)，$\neg P$为总体论域(如矩形域)中P的余集。

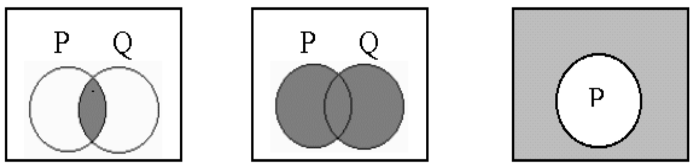


$P \wedge Q$ $P \vee Q$ $\neg P$

Venn图(2)

从Venn 图因$P \wedge Q$较P来得“小”，$P \vee Q$较P来得“大”，从而有

$P \vee (P \wedge Q) = P$ $P \wedge (P \vee Q) = P$



$P \wedge Q$ $P \vee Q$ $\neg P$

注意

- 对这些等式使用自然用语加以说明，将有助于理解。
- 如P表示张三是学生，Q表示李四是工人，那么$\neg(P \vee Q)$就表示并非“张三是学生或者李四是工人”。这相当于说，“张三不是学生而且李四也不是工人”，即可由$\neg P \wedge \neg Q$表示，从而有

$\neg(P \vee Q) = \neg P \wedge \neg Q$。

若干常用的等值公式

- 由于人们对¬、∨、∧更为熟悉，常将含有→和↔的公式化成仅含有¬、∨、∧的公式。这也是证明和理解含有→，↔的公式的一般方法。
- 公式11-18是等值演算中经常使用的,也该掌握它们，特别是能直观地解释它们的成立。

常用的等值公式 (1)

11. $P \to Q = \neg P \lor Q$
    - 通常对P→Q进行运算时，不如用¬P∨Q来得方便。而且以¬P∨Q表示P→Q帮助我们理解如果P则Q的逻辑含义。问题是这种表示也有缺点，丢失了P、Q间的因果关系。
12. $P \to Q = \neg Q \to \neg P$
    - 如将P→Q视为正定理，那么¬Q→¬P就是相应的逆否定理，它们必然同时为真，同时为假，所以是等值的。
13. $P \to (Q \to R) = (P \land Q) \to R$
    - P是(Q→R)的前提，Q是R的前提，于是可将两个前提的合取P∧Q作为总的前提。 即如果P则如果Q则R，等价于如果P与Q则R。

常用的等值公式 (2)

14. $P \leftrightarrow Q = (P \land Q) \lor (\neg P \land \neg Q)$
    - 这可解释为P↔Q为真，有两种可能的情形，即(P∧Q)为真或(¬P∧¬Q)为真。而P∧Q为真，必是在P = Q = T的情况下出现，¬P∧¬Q为真，必是在P = Q = F的情况下出现。从而可说，P↔Q为真，是在P、Q同时为真或同时为假时成立。这就是从取真来描述这等式。
15. $P \leftrightarrow Q = (P \lor \neg Q) \land (\neg P \lor Q)$
    - 这可解释为P↔Q为假，有两种可能的情形，即(P∨¬Q)为假或(¬P∨Q)为假，而P∨¬Q为假，必是在P = F，Q = T的情况下出现，¬P∨Q为假，必是在P = T，Q = F的情况下出现。从而可说P↔Q为假，是在P真Q假或P假Q真 时成立。这就是从取假来描述这等式

常用的等值公式 (3)

16. $P \leftrightarrow Q = (P \to Q) \land (Q \to P)$
    - 这表明P↔Q成立，等价于正定理P→Q和逆定理Q→P都成立。
17. $P \to (Q \to R) = Q \to (P \to R)$
    - 前提条件P、Q可交换次序。
18. $(P \to R) \land (Q \to R) = (P \lor Q) \to R$
    - 左端说明的是由P而且由Q都有R成立。从而可以说由P或Q就有R成立，这就是等式右端。

置换规则

定理：对公式A的子公式，用与之等值的公式来代换便称置换。

置换规则　公式A的子公式置换后A化为公式B，必有A = B。

当A是重言式时，置换后的公式B必也是重言式。

等值演算举例

例1：证明 $(\neg P\wedge(\neg Q\wedge R))\vee(Q\wedge R)\vee(P\wedge R) = R$

证明：

左端 $=((\neg P\wedge(\neg Q\wedge R))\vee((Q\vee P)\wedge R)$	（分配律）
$=((\neg P\wedge\neg Q)\wedge R))\vee((Q\vee P)\wedge R)$	（结合律）
$=(\neg(P\vee Q)\wedge R)\vee((Q\vee P)\wedge R)$	（摩根律）
$=(\neg(P\vee Q)\vee(Q\vee P))\wedge R$	（分配律）
$=(\neg(P\vee Q)\vee(P\vee Q))\wedge R$	（交换律）
$=T\wedge R$	（置　换）
$=R$	（同一律）

等值演算举例 (2)

例2：试证

$((P\vee Q)\wedge\neg(\neg P\wedge(\neg Q\vee\neg R)))\vee(\neg P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge\neg R) = T$

证明：

左端

$=((P\vee Q)\wedge(P\vee(Q\wedge R)))\vee\neg((P\vee Q)\wedge(P\vee R))$	（摩根律）
$=((P\vee Q)\wedge(P\vee Q)\wedge(P\vee R))\vee\neg((P\vee Q)\wedge(P\vee R))$	（分配律）
$=((P\vee Q)\wedge(P\vee R))\vee\neg((P\vee Q)\wedge(P\vee R))$	（等幂律）
$=T$	

Thank You !

Xiaofeng Gao