



推理演算与谓词逻辑

Propositional Calculus and Predicate Logic

高晓汎 (Xiaofeng Gao)

Department of Computer Science
Shanghai Jiao Tong Univ.

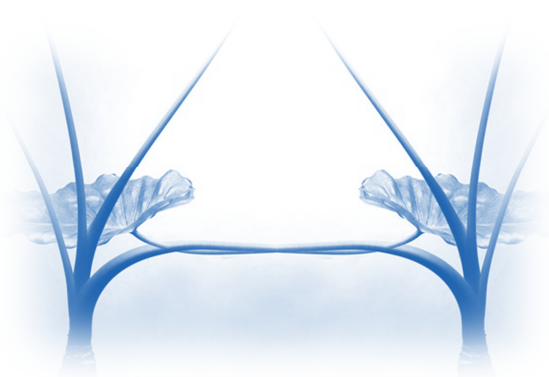
目录

- 1 范式
- 2 推理形式与演算
- 3 谓词逻辑
- 4 谓词逻辑的形式化

2016/11/15

Introduction To CS--Xiaofeng Gao

2



范式

Normal Form

2016/11/15

Introduction To CS--Xiaofeng Gao

3

范式

- ❖ 任何一个命题公式等值而形式不同的命题公式可以有无穷多个。
- ❖ 凡与命题公式A等值的公式，能否都可以化为某一个统一的**标准形式**？
- ❖ 借助于标准形对任意两个形式上不同的公式，可判断它们的是否等值，是否为重言式或矛盾式等。

2016/11/15

Introduction To CS--Xiaofeng Gao

4

简单析(合)取式

- ❖ 一个命题符号 A 及其否定 $\neg A$ 统称为**文字(literal)**.
- ❖ 由文字利用 $\vee(\wedge)$ 联结而成的公式称为**简单析(合)取式**.
 - 简单析取式例: $A, \neg A, A\vee B, A\vee\neg B\vee\neg A$
 - 简单合取式例: $A, \neg A, A\wedge B, A\wedge\neg B\wedge\neg A$
- ❖ 定理
 - (1) 一个简单析取式是永真式 iff 它同时包含一个命题符号及其否定.
 - (2) 一个简单合取式是矛盾式 iff 它同时包含一个命题符号及其否定.

2016/11/15

Introduction To CS--Xiaofeng Gao

5

析(合)取范式

- ❖ 由若干个简单合取式利用 $\vee$ 联结而成的公式称为**析取范式**.
 - 形如: $A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n$ (诸 A_i 是简单合取式)
- ❖ 由若干个简单析取式利用 $\wedge$ 联结而成的公式称为**合取范式**.
 - 形如: $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n$ (诸 A_i 是简单析取式)
- ❖ 定理
 - (1) 一个析取范式是矛盾式 iff 它的每个简单合取式都是矛盾式.
 - (2) 一个合取范式是永真式 iff 它的每个简单析取式都是永真式.

2016/11/15

Introduction To CS--Xiaofeng Gao

6

范式存在定理及求法

- ❖ 范式定理: 对任一命题公式都存在与之等值的析取范式和合取范式.
- ❖ 等值变换法求范式
 - (1) 消去 $\rightarrow, \leftrightarrow$
 - (2) $\neg$ 深入到命题符号之前
 - (3) $\vee(\wedge)$ 深入
 - 至此已是范式.
 - (4) (可选)化简

2016/11/15

Introduction To CS--Xiaofeng Gao

7

求范式(1):消去 $\rightarrow, \leftrightarrow$

- ❖ 方法:利用下列等值式
$$A \rightarrow B = \neg A \vee B$$
$$A \leftrightarrow B = (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B) \quad [\text{用于求析取范式}]$$
$$A \leftrightarrow B = (A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee B) \quad [\text{用于求合取范式}]$$
- ❖ 例:求 $\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$ 的析取范式
$$\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$$
$$= (\neg(P \vee Q) \wedge (P \wedge Q)) \vee (\neg \neg(P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q))$$

2016/11/15

Introduction To CS--Xiaofeng Gao

8

求范式(2):否定词深入

❖ 方法:利用下列等值式

$$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$$

$$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$$

$$\neg\neg A = A$$

❖ 例

$$\begin{aligned} & \neg(P \vee Q) \leftrightarrow (P \wedge Q) \\ &= (\neg(P \vee Q) \wedge (P \wedge Q)) \vee (\neg\neg(P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)) \\ &= (\neg P \wedge \neg Q \wedge P \wedge Q) \vee ((P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)) \end{aligned}$$

求范式(3):合(析)取词深入

❖ 方法:利用分配律

$$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \quad [\text{用于求析取范式}]$$

$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C) \quad [\text{用于求合取范式}]$$

❖ 例

$$\begin{aligned} & \neg(P \vee Q) \leftrightarrow (P \wedge Q) \\ &= (\neg(P \vee Q) \wedge (P \wedge Q)) \vee (\neg\neg(P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)) \\ &= (\neg P \wedge \neg Q \wedge P \wedge Q) \vee ((P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)) \\ &= (\neg P \wedge \neg Q \wedge P \wedge Q) \vee \\ & \quad (P \wedge \neg P) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg P) \vee (Q \wedge \neg Q) \end{aligned}$$

求范式(4):(可选)化简

❖ 方法:利用下列等值式消去矛盾式

$$A \wedge F = F$$

$$A \vee F = A$$

❖ 例

$$\begin{aligned} & \neg(P \vee Q) \leftrightarrow (P \wedge Q) \\ & \Leftrightarrow (\neg(P \vee Q) \wedge (P \wedge Q)) \vee (\neg\neg(P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)) \\ & \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge P \wedge Q) \vee ((P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)) \\ & \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge P \wedge Q) \vee \\ & \quad (P \wedge \neg P) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg P) \vee (Q \wedge \neg Q) \\ & \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \end{aligned}$$

范式的用途

❖ 判断A是否永真式

- 求A的合取范式,若每个简单析取式都含有某个变元及其否定(如P和 $\neg P$),则A是永真式.

❖ 判断A是否矛盾式

- 求A的析取范式,若每个简单合取式都含有某个变元及其否定(如P和 $\neg P$),则A是矛盾式.

❖ 判断A = B?

- 求A和B的同一种范式,看是否相同.
- 这里有问题:范式唯一吗?

极小项与极大项

设公式只涉及n个命题变量

$P_1, \dots, P_n$.

❖ 极小项: n个文字的简单合取式, 诸 P_i 以 P_i 或 $\neg P_i$ 形式出现且只出现一次, 且 P_i 出现在左起第i个位置.

▪ 极小项有 2^n 个: 根据对应的成真赋值, 可记为

$$m_{0\dots 00} = \neg P_1 \wedge \dots \wedge \neg P_{n-1} \wedge \neg P_n$$

$$m_{0\dots 01} = \neg P_1 \wedge \dots \wedge \neg P_{n-1} \wedge P_n$$

$$m_{0\dots 10} = \neg P_1 \wedge \dots \wedge P_{n-1} \wedge \neg P_n$$

...

$$m_{1\dots 11} = P_1 \wedge \dots \wedge P_{n-1} \wedge P_n$$

设公式只涉及n个命题变量

$P_1, \dots, P_n$.

❖ 极大项: n个文字的简单析取式, 诸 P_i 以 P_i 或 $\neg P_i$ 形式出现且只出现一次, 且 P_i 出现在左起第i个位置.

▪ 极大项有 2^n 个: 根据对应的成假赋值, 可记为

$$M_{0\dots 00} = P_1 \vee \dots \vee P_{n-1} \vee P_n$$

$$M_{0\dots 01} = P_1 \vee \dots \vee P_{n-1} \vee \neg P_n$$

$$M_{0\dots 10} = P_1 \vee \dots \vee \neg P_{n-1} \vee P_n$$

...

$$M_{1\dots 11} = \neg P_1 \vee \dots \vee \neg P_{n-1} \vee \neg P_n$$

极小/大项的性质

❖ 每个极小项只在一个赋值下为真.

❖ 一个赋值不能使两个极小项都为真.

▪ 两个极小项的合取为0

❖ 极小项两两不等值.

❖ 若A由k个极小项的析取组成, 则其余 $2^n - k$ 个极小项的析取就是 $\neg A$.

▪ 若 $k = 2^n$, 则A是重言式.

❖ 每个极大项只在一个赋值下为假.

❖ 一个赋值不能使两个极大项都为假.

▪ 两个极大项的析取为1

❖ 极大项两两不等值.

❖ 若A由k个极大项的合取组成, 则其余 $2^n - k$ 个极大项的合取就是 $\neg A$.

▪ 若 $k = 2^n$, 则A是矛盾式.

主范式

❖ 主析取范式: 仅由极小项构成的析取范式.

❖ 定理: 任何非永假的命题公式都存在唯一与之等值的主析取范式.

❖ 主合取范式: 仅由极大项构成的合取范式.

❖ 定理: 任何非永真的命题公式都存在唯一与之等值的主合取范式.

主范式的求法(1)

❖ 利用基本等值式

(1) 先求一个析取范式.

(2) 若简单合取式A中未出现命题变量P, 则通过

$$\begin{aligned} A &= A \wedge (P \vee \neg P) \\ &= (A \wedge P) \vee (A \wedge \neg P) \end{aligned}$$

来补足P.

(3) 消去重复出现的变量, 矛盾式及重复出现的极小项.

❖ 利用基本等值式

(1) 先求一个合取范式.

(2) 若简单析取式A中未出现命题变量P, 则通过

$$\begin{aligned} A &= A \vee (P \wedge \neg P) \\ &= (A \vee P) \wedge (A \vee \neg P) \end{aligned}$$

来补足P.

(3) 消去重复出现的变量, 永真式及重复出现的极大项.

例:基本等值式方法

例:求 $P \rightarrow Q$ 的主析取范式

$$(1) P \rightarrow Q = \neg P \vee Q$$

$$\begin{aligned} (2) \neg P &= \neg P \wedge (Q \vee \neg Q) \\ &= (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \\ Q &= Q \wedge (P \vee \neg P) \\ &= (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q) \end{aligned}$$

(3)消去一个 $(\neg P \wedge Q)$

于是: $P \rightarrow Q$

$$= m_{00} \vee m_{01} \vee m_{11}$$

例:求 $\neg(P \rightarrow Q)$ 的主合取范式

$$(1) \neg(P \rightarrow Q) = P \wedge \neg Q$$

$$\begin{aligned} (2) P &= P \vee (Q \wedge \neg Q) \\ &= (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \\ \neg Q &= \neg Q \vee (P \wedge \neg P) \\ &= (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q) \end{aligned}$$

(3)消去一个 $(P \vee \neg Q)$

于是: $\neg(P \rightarrow Q)$

$$= M_{00} \wedge M_{01} \wedge M_{11}$$

主范式的求法(2)

❖ 利用真值表

(1) 根据每个使 A 为真的赋值写一个包含各命题变量的合取式(即极小项).

(2) 写出各极小项的析取式(即主析取范式)

❖ 利用真值表

(1) 根据每个使 A 为假的赋值写一个包含各命题变量的析取式(即极大项).

(2) 写出各极大项的合取式(即主合取范式).

例:真值表方法求主析取范式

例: A有三个成真赋值.

由 $(P, Q) = (0, 0)$ 可写出合取式:

$$\neg P \wedge \neg Q$$

由 $(P, Q) = (0, 1)$ 可写出合取式:

$$\neg P \wedge Q$$

由 $(P, Q) = (1, 1)$ 可写出合取式: $P \wedge Q$

于是得到A: $(\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge Q)$

P	Q	A
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

例:真值表方法求主合取范式

例: A有两个成假赋值.

由 $(P, Q) = (1, 0)$ 可写出析取式:

$$\neg P \vee Q$$

由 $(P, Q) = (1, 1)$ 可写出析取式:

$$\neg P \vee \neg Q$$

于是得到A: $(\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$

P	Q	A
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0



推理形式与推理演算

Formal Inference and Deduction

用公式表达推理

❖ 用命题公式来描述在科学和日常生活中进行的推理。

▪ 公式形状是蕴涵式： $A \rightarrow B$ 。

▪ 例如下面三个常见的推理：

$((P \rightarrow Q) \wedge P) \rightarrow Q$ 正确

$((P \rightarrow Q) \wedge \neg P) \rightarrow \neg Q$ 错误

$((P \rightarrow Q) \wedge \neg Q) \rightarrow \neg P$ 正确

❖ 问题：什么样的蕴涵式描述了正确的推理？

永真蕴涵关系 $\Rightarrow$

❖ 这里讨论从前提推出结论的问题。

❖ 给定公式A和B, 若在任何赋值下, A为真则B也为真, 则称A永真蕴涵B, 记作 $A \Rightarrow B$ 。

▪ A是前提, B是A的逻辑结论。

▪ $\Rightarrow$ 即日常所说的“推出”关系

❖ 例如：若 $P \wedge Q$ 为真, 显然Q也为真, 所以

$$P \wedge Q \Rightarrow Q$$

$\Rightarrow$ 与 $\rightarrow$ 的关系

❖ 定理：对公式A和B,

$A \Rightarrow B$ iff $A \rightarrow B$ 是永真式

▪ 所以 $A \Rightarrow B$ 称为永真蕴涵式。

▪ 注：有的教材中干脆利用 $\rightarrow$ 来定义 $\Rightarrow$ 。

❖ 定理：对公式A和B,

$A \Rightarrow B$ iff $A \wedge \neg B$ 是矛盾式

$\Rightarrow$ 与 $\rightarrow$ 的不同

❖ 从形式系统角度看

- $\rightarrow$ 是系统内的符号, $A \rightarrow B$ 是系统内的命题公式. (语法)
- $\Rightarrow$ 是系统外的符号, $A \Rightarrow B$ 不是命题公式!
 - 在系统外观察系统内公式间的蕴涵关系. (语义)

❖ 从表达的意思来看

- $A \rightarrow B$ 表达的是“不能A真而B假”
 - 除了“A真则B真”,还包含“A假则B可真可假”的情况.
- $A \Rightarrow B$ 表达且仅表达“A真则B真”的意思.

基本永真蕴涵式

定理: 以下都是永真蕴涵式.

$$(I_1) A \wedge B \Rightarrow A$$

$$(I_2) A \wedge B \Rightarrow B$$

$$(I_3) A \Rightarrow A \vee B$$

$$(I_4) B \Rightarrow A \vee B$$

$$(I_5) \neg A \Rightarrow A \rightarrow B$$

[假前提蕴涵任意结论]

$$(I_6) B \Rightarrow A \rightarrow B$$

[真结论被任意前提蕴涵]

$$(I_7) \neg(A \rightarrow B) \Rightarrow A$$

[不能蕴涵任意结论的前提, 必真]

$$(I_8) \neg(A \rightarrow B) \Rightarrow \neg B$$

[不能被任意前提蕴涵的结论, 必假]

$$(I_9) \neg A \wedge (A \vee B) \Rightarrow B$$

[排除法]

基本永真蕴涵式(续)

$$(I_{10}) A \wedge (A \rightarrow B) \Rightarrow B \quad [\text{modus ponens, 分离规则}]$$

$$(I_{11}) \neg B \wedge (A \rightarrow B) \Rightarrow \neg A \quad [\text{modus tollens}]$$

$$(I_{12}) (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \Rightarrow A \rightarrow C \quad [\text{三段论规则}]$$

$$(I_{13}) (A \vee B) \wedge (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \Rightarrow C$$

$$(14) (A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Rightarrow A \leftrightarrow C$$

$$(15) (A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow S) \wedge (A \vee C) \Rightarrow B \vee S$$

$$(16) (A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow S) \wedge (\neg B \vee \neg S) \Rightarrow \neg A \vee \neg C$$

$$(17) (B \rightarrow C) \Rightarrow (A \vee B) \rightarrow (A \vee C)$$

$$(18) (B \rightarrow C) \Rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$$

如何证明 $A \Rightarrow B$?

1. 利用真值表

- (1) 列出公式A和B在各种赋值下的真值.
- (2) 若使A为真的赋值也都使B为真, 则 $A \Rightarrow B$; 否则 $A \Rightarrow B$ 不成立.

2. 转化为证明 $A \rightarrow B$ 永真

- (1) 真值表技术
- (2) 等值演算
- (3) 求合取范式: 看各析取式是否同时包含P及 $\neg P$
- (4) 解逻辑方程

如何证明 $A \Rightarrow B$? (续)

3. 利用 $\Rightarrow$ 进行推理

- (1) $A \Rightarrow A$
- (2) $A \Rightarrow B$ 且 $B \Rightarrow A$ iff $A \Leftrightarrow B$
- (3) 若 $A \Rightarrow B$ 且 $B \Rightarrow C$, 则 $A \Rightarrow C$
- (4) 若 $A \Rightarrow B$ 且 $A \Rightarrow C$, 则 $A \Rightarrow B \wedge C$
- (5) 若 $A \Rightarrow C$ 且 $B \Rightarrow C$, 则 $A \vee B \Rightarrow C$
- (6) 若 $A \Rightarrow B$, 则 $\neg B \Rightarrow \neg A$
- (7) 若 $\neg B \Rightarrow \neg A$, 则 $A \Rightarrow B$

证明 $A \Rightarrow B$: 解逻辑方程法

❖ 方法一

- $A \Rightarrow B$ 意即: 使A成真的赋值 $t(\)$ 也使B成真.
- 因此可解逻辑方程 $t(A)=1$
 - 有时可以求A的合取范式 $A_1 \wedge \dots \wedge A_n$ 再求 $t(A_i)=1$
- 将求出的解代入B中, 验证 $t(B)=1$.

❖ 方法二

- $A \Rightarrow B$ 意即: 使B成假的赋值 $t(\)$ 也使A成假.
- 因此可解逻辑方程 $t(B)=0$
 - 有时可以求B的析取范式 $B_1 \vee \dots \vee B_n$ 再求 $t(B_i)=0$
- 将求出的解代入A中, 验证 $t(A)=0$.

推理演算

- ❖ 之前介绍的证明 $P \Rightarrow Q$ 的方法, 都是根据公式的真值来论证的. 体现不出证明的层层推进过程, 而且变元很多时不方便.
- ❖ 推理演算: 引入一些推理规则, 利用前提和基本推理公式(重言式), 实现逐步推进的推理过程.
 - 从若干前提 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 出发欲证明Q.
 - 利用推理规则不断产生中间结论
 - 直至得出最终结论Q.

推理规则

1. **前提引入规则**: 推理过程中可随时引入前提.
2. **结论引用规则**: 推理过程中得到的中间结论可用作后续推理的前提.
3. **代入规则**: 推理过程中对重言式的命题变项可使用代入规则.
4. **置换规则**: 推理过程中可对任何子公式用等值公式置换.
5. **分离规则**: 推理过程中若已得到 $P \rightarrow Q$ 和P, 则可推得Q.
6. **条件证明规则**: 为证明 $P_1 \Rightarrow P_2 \rightarrow Q$, 可证明 $P_1 \wedge P_2 \Rightarrow Q$. 反之亦然.

例1:推理演算

证明: $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R, P \vdash R$

(因为左边不是公式, 不能用 $\Rightarrow$, 故用 $\vdash$ 区分. 但本质一样, 相当于证明 $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \wedge P \Rightarrow R$.)

证明过程如下

- | | |
|-----------------------|------------|
| (1) P | 前提引入 |
| (2) $P \rightarrow Q$ | 前提引入 |
| (3) Q | 分离 (1) (2) |
| (4) $Q \rightarrow R$ | 前提引入 |
| (5) R | 分离 (3) (4) |

例2:推理演算

证明: $C \vee D, (C \vee D) \rightarrow \neg E, \neg E \rightarrow (A \wedge \neg B), (A \wedge \neg B) \rightarrow (R \vee S) \vdash R \vee S$

证明过程如下

- | | |
|--|-------------|
| (1) $(C \vee D) \rightarrow \neg E$ | 前提引入 |
| (2) $\neg E \rightarrow (A \wedge \neg B)$ | 前提引入 |
| (3) $(C \vee D) \rightarrow (A \wedge \neg B)$ | (1) (2) 三段论 |
| (4) $(A \wedge \neg B) \rightarrow (R \vee S)$ | 前提引入 |
| (5) $(C \vee D) \rightarrow (R \vee S)$ | (3) (4) 三段论 |
| (6) $C \vee D$ | 前提引入 |
| (7) $R \vee S$ | (5) (6) 分离 |



谓词逻辑

Predicate Logic

命题逻辑的缺陷

❖ 简单命题作为基本单元 (原子) 不再对简单命题的内部结构进行分析。

✓ 如命题: “ $\sqrt{2}$ 是无理数”、“ $\sqrt{3}$ 是无理数”是作为两个独立的命题看待的, 不考虑这个命题间的联系. 事实上这两个命题仍可作分解, 它们都有主词和谓词。

❖ 引入谓词, 引入变量并考虑到表示变量的数量上一般与个别的全称量词和存在量词, 进而研究它们的形式结构和逻辑关系, 这便构成了谓词逻辑。

✓ 约定以小写字母表示命题, 而以大写字母来表示谓词

✓ 所介绍的内容限于一阶谓词逻辑或称狭谓词逻辑

谓词

❖ 例 张三是学生。李四是学生。

它们都有主词和谓词，主词“张三”、“李四”不同，而谓词“是学生”相同。

现在我们强调它们的共同点。若以大写符号P表示“是学生”，这样两个命题的共同性可由P来体现了，但主词还需区别开来，便可把这两个命题分别写成P(张三)和P(李四)。

一般地可引入变量x来表示主词，则符号P(x)就表示“x是学生”。通常把P(x)称作谓词。

谓词解释

❖ 可以这样来理解谓词：

- ✓ 在一个命题里，如果主词只有一个，这时表示该主词性质或属性的词便称作谓词。这是一元(目)谓词，以P(x)，Q(x)，...表示。
- ✓ 在一个命题里，如果主词多于一个，那么表示这几个主词间的关系的词称作谓词。这是多元谓词，以P(x, y)，Q(x, y)，R(x, y, z)，...表示。

❖ 如

“张三和李四是兄弟”。其中“是兄弟”是谓词。

“5大于3”。其中“大于”是谓词。

“张三比李四高”。其中“比.....高”是谓词。

“天津位于北京的东南”。其中“位于.....东南”是谓词。

“A在B上”。其中“在.....上”是谓词。

个体词

❖ 在数理逻辑中，不使用主词这个词，习惯称为个体词。它是一个命题里表示思维对象的词。P(张三)中的张三是个体词或称个体常项。而谓词P(x)中的变量x为个体变项或个体变元。

❖ 有n个个体的谓词P(x₁, ..., x_n)称n项(目、元)谓词。如果P是已赋有确定含义的为谓词，就称为谓词常项。而P表任一谓词时，就称为谓词变项。

❖ 将个体变项的变化范围称为个体域或论域，以D表示。个体域除明确指明外，认为是包括一切事物的一个最广的集合。谓词变项的变化范围，不做特别声明时，指一切关系或一切性质的集合。

函数

❖ 在谓词逻辑中的函数是某个体域(不必是实数)到另一个体域的映射，不同于将个体映射为真假值的谓词。而且函数并不单独使用，是嵌入在谓词中。

- 如函数father(x)表示x的父亲，若P(x)表示x是教师，则P(father(x))就表示x的父亲是教师。当x的取值确定后，P(father(x))的值或为真或为假。
- 又如“张三的父亲和母亲是夫妻”可描述成
MARRIED(father(张三), mother(张三))
其中谓词MARRIED(x, y)表示x和y是夫妻，而father(x), mother(x)是函数。

❖ 约定函数符号用小写字母表示，如f, g, child, ...这不会与以小写字母表示的命题相混的。

量词

- ❖ 用来表示个体数量的词是**量词**，也可看作是对个体词所加的限制、约束的词。
- ❖ 但主要不是对数量一个、二个、三十……的具体描述，而是讨论两个最通用的数量限制词，一个是“**所有的**”一个是“**至少有一个**”，分别称什全称量词和存在量词。
- ❖ 在某种意义上说。这是一对相对立的词。

全称量词

- “凡事物都是运动的”
- ❖ 由于个体 x 的论域是包含一切事物的集合，这句话可形式描述为 $(\forall x)(x \text{ 是运动的})$
- 也可写成 $\forall x(x \text{ 是运动的})$
- ❖ 若以 $P(x)$ 表示 x 是运动的，那么还可写成 $\forall x(P(x))$ ，或 $(\forall x)(P(x))$ (但 $(\forall x)(P(x) \vee Q(x))$ 不能写成 $(\forall x P(x) \vee Q(x))$)
- ❖ 符号 $(\forall x)$ 读作所有的 x 或任一 x ，一切 x 。而 $\forall$ 就是全称量词，它所约束的个体是 x
- ❖ 命题 $(\forall x)P(x)$ 当且仅当对论域中的所有 x 来说， $P(x)$ 均为真时方为真。这就是全称量词的定义。
- ❖ 从而 $(\forall x)P(x) = F$ 成立，当且仅当有一个 $x_0 \in D$ ，使 $P(x_0) = F$ 。

存在量词

“有的事物是动物”

- ❖ 这命题中“有的”就是表示个体变元数量的词，“有的”的等义词有“存在一个”、“有一个”、“有些”。这句话的意思是说有一事物，它是动物。或有一 x ， x 是动物。
- 可形式描述为 $(\exists x)(x \text{ 是动物})$ 或 $\exists x(x \text{ 是动物})$
- ❖ 如果以 $Q(x)$ 表示 x 是动物，那么这句话就可写成 $(\exists x)(Q(x))$
- ❖ 符号 $(\exists x)$ 读作至少有一个 x 或存在一个 x 或有某些 x 。而 $\exists$ 就是对个体词起约束作用的存在量词，所约束的变元是 x 。
- ❖ 命题 $(\exists x)(Q(x))$ 当且仅当在论域中至少有一个 x_0 ， $Q(x_0)$ 为真时方为真。这就是存在量词的定义。
- ❖ 从而 $(\exists x)Q(x) = F$ 当且仅当对所有的 $x \in D$ ，都有 $Q(x) = F$

约束变元和自由变元

- ❖ 在一个含有量词的命题形式里，区分个体词受量词的约束还是不受量词的约束是重要的。无论在定义合式公式以及对个体变元作代入时都需区分这两种情形。
- ❖ 若 $P(x)$ 表 x 是有理数，这时的变元 x 不受任何量词约束，便称是自由的。而 $(\forall x)P(x)$ 中的两处出现的变元 x 都受量词 $\forall$ 的约束，便称作约束变元，受约束的变元也称被量词量化的变元。
- ❖ 命题形式 $(\forall x)P(x) \vee Q(y)$ 中，变元 x 是约束的，而变元 y 是自由的。

量词的辖域

❖ 量词所约束的范围称为量词的辖域。如

$(\forall x)R(x, y)$ 中, $R(x, y)$ 是 $(\forall x)$ 的辖域。

$(\exists x)((\forall y)P(x, y))$ 中, $P(x, y)$ 是 $(\forall y)$ 的辖域,

$(\forall y)P(x, y)$ 是 $\exists x$ 的辖域

$\langle ag-term \rangle ::= Term_{ag}$ 中任一元素	$\langle pl-term \rangle ::= Term_{pl}$ 中任一元素
$\langle pb-term \rangle ::= Term_{pb}$ 中任一元素	$\langle gr-term \rangle ::= Term_{gr}$ 中任一元素
$\langle pred-sym \rangle ::= Pred$ 中任一元素	$\langle ac-term \rangle ::= Term_{ac}$ 和 $Term_{ao}$ 中任一元素
$\langle term \rangle ::= Term$ 中任一元素	$\langle var \rangle ::= Var$ 中任一元素
$\langle msg \rangle ::= Msg$ 中任一元素	

$\langle state-fmla \rangle ::= true$	$\langle pred-sym \rangle \langle term \rangle \dots \langle term \rangle$	$\langle Bel \langle ag-term \rangle \langle state-fmla \rangle \rangle$
$\langle Goal \langle ag-term \rangle \langle state-fmla \rangle \rangle$	$\langle Int \langle ag-term \rangle \langle state-fmla \rangle \rangle$	$\langle \langle term \rangle = \langle term \rangle \rangle$
$\langle \langle ag-term \rangle \in \langle gr-term \rangle \rangle$	$\langle HasPlan \langle ag-term \rangle \langle pl-term \rangle \rangle$	$\langle \langle path-fmla \rangle \rangle$
$\neg \langle state-fmla \rangle$	$\langle state-fmla \rangle \vee \langle state-fmla \rangle$	$\forall \langle var \rangle \cdot \langle state-fmla \rangle$
$\langle path-fmla \rangle ::= \langle state-fmla \rangle$	$\langle Perf \langle ag-term \rangle \langle pb-term \rangle \rangle$	$\langle Exec \langle ag-term \rangle \langle ac-term \rangle \rangle$
$\langle PragInt comm \langle \langle ag-term \rangle, \langle ag-term \rangle, \langle msg \rangle \rangle \rangle$	$\langle path-fmla \rangle \wedge \langle path-fmla \rangle$	$N \langle path-fmla \rangle$
$\neg \langle path-fmla \rangle$	$\langle path-fmla \rangle \vee \langle path-fmla \rangle$	$\forall \langle var \rangle \cdot \langle path-fmla \rangle$
$\langle wff \rangle ::= \langle state-fmla \rangle$		

谓词逻辑的形式化

Predicate Formalization

合式公式定义

- (1) 命题常项、命题变项和原子谓词公式(不含联结词的谓词)都是合式公式。
- (2) 如果A是合式公式, 则, $\neg A$ 也是合式公式。
- (3) 如果A, B是合式公式, 而无变元x在A, B的一个中是约束的而在另一个中是自由的, 则 $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$ 也是合式公式(最外层括号可省略)。
- (4) 如果A是合式公式, 而x在A中是自由变元, 则 $(\forall x)A$, $(\exists x)A$ 也是合式公式。
- (5) 只有适合以上4条的才是合式公式。

判断一个公式是否为合式公式

依定义

$\neg p$, $\neg P(x, y) \vee Q(x, y)$,

$(\forall x) (A(x) \rightarrow B(x))$,

$(\exists x) (A(x) \rightarrow (\forall y) B(x, y))$ 都是合式公式

$(\forall x) F(x) \wedge G(x)$,

$(\exists x) ((\forall x) F(x))$,

$(\forall x) P(y)$ 都不是合式公式

“所有的有理数都是实数”的形式化

- ❖ 所有的有理数都是实数，其意思是说，对任一事物而言，如果它是有理数，那么它是实数。即对任一 x 而言，如果 x 是有理数，那么 x 是实数。若以 $P(x)$ 表示 x 是有理数， $Q(x)$ 表示 x 是实数，这句话的形式描述应为

$$(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$$

- ❖ 因为 x 的论域是一切事物的集合，所以 x 是有理数是一个条件。

注意事项

- ❖ 需注意的是这句话不能形式化为

$$(\forall x)(P(x) \wedge Q(x))$$

- ❖ 这公式的意思是说，对所有的 x ， x 是有理数而且又是实数。

“所有的……都是……”，这类语句的形式描述只能使用 $\rightarrow$ 而不能使用 $\wedge$ 。

解释

- ❖ 所有的有理数都是实数，这句话按人们通常的认识肯定是成立的，取值为真，而且其真值与论域是无关的。设论域 $D_1 = \{1/2, \pi, \text{张三}, \text{桌子}\}$ 含有有理数也含有非有理数。使用

$$P(x) \rightarrow Q(x) = T$$

来描述这句话是对的。因为对所有的 $x \in D_1$ 都

有 $(P(x) \rightarrow Q(x)) = T$ ，从 $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) = T$ 。如果 D_1 只含有有理数或不含任一有理数，仍有 $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) = T$ 。从而使用 $\rightarrow$ 来描述“所有的……都是……”是符合人们的常规理解的。

- ❖ 然而以 $(\forall x)(P(x) \wedge Q(x))$ 来描述，就有问题了，因为仅当 D_1 中只含有有理数时， $(\forall x)(P(x) \wedge Q(x))$ 才为真。即 $(\forall x)(P(x) \wedge Q(x))$ 的取值与论域是有关的，“所有的有理数都是实数”，这句话有时对有时不对，所以这种描述是不合适的。

“有的实数是有理数”的形式化

- ❖ 这句话的意思是说，存在一事物它是实数，而且是有理数。即有一个 x ， x 是实数并且是有理数，仍以 $P(x)$ 表示 x 是有理数， $Q(x)$ 表示 x 是实数，这句话的形式描述应为

$$(\exists x)(Q(x) \wedge P(x))$$

- ❖ 需注意的是不能使用

$$(\exists x)(Q(x) \rightarrow P(x))$$

来形式化该句。

“没有无理数是有理数”的形式化

- 这句话有否定词，意思是对任一 x 而言，如果 x 是无理数，那么 x 不是有理数。若以 $A(x)$ 表示 x 是无理数， $B(x)$ 表示 x 是有理数，这句话的形式描述为

$$\neg(\exists x)(A(x) \wedge B(x))$$

- 也可以用逻辑上等价的式子描述

$$(\forall x)(A(x) \rightarrow \neg B(x))$$

$$(\forall x)(B(x) \rightarrow \neg A(x))$$

- “有的……是……”这类语句，按人们通常的认识，它的取值是真是假应与个体域有关。
- 设论域 $D_1 = \{e, \Pi, \text{张三}, \text{桌子}\}$ ，其中没有有理数，所以在 D_1 上不存在是有理数的实数，故在 D_1 上这句话真值应为假， $(\exists x)(Q(x) \wedge P(x))$ 也确为假。仅当 D_1 中有有理数时 $(\exists x)(Q(x) \wedge P(x))$ 方为真。从而这种形式描述是正确的。
- 若以 $(\exists x)(Q(x) \rightarrow P(x))$ 来描述，就不符合人们的常规理解了。因为凡在不含实数的论域上都有 $(\exists x)(Q(x) \rightarrow P(x)) = T$ 这是不对的。

“有的实数不是有理数”的形式化

- 这句话的意思是有的 x ，它是实数而且不是有理数。若以 $A(x)$ 表示 x 是实数， $B(x)$ 表示 x 是有理数，那么这句话可形式描述为

$$(\exists x)(A(x) \wedge \neg B(x))$$

对谓词变元多次量化的分析

- 设 $P(x, y)$ 是二元谓词，对两个变元的量化可得4种形式。

$$(1) (\forall x)(\forall y)P(x, y) = (\forall y)(\forall x)P(x, y)$$

$$\text{显然有 } (\forall x)(\forall y)P(x, y) = (\forall x)((\forall y)P(x, y))$$

$$(2) (\forall x)(\exists y)P(x, y) = (\forall x)((\exists y)P(x, y))$$

注意： $(\forall x)(\exists y)$ 不可交换

- 如 $P(x, y)$ 表 $x+y=0$ ，论域 D_1 为实数。这时：

对 $x_1 \in D_1$ ，有 $y_1 \in D_1$ 使 $x_1+y_1=0$ 。

对 $x_2 \in D_1$ ，有 $y_2 \in D_1$ 使 $x_2+y_2=0$ 。

从而 $(\forall x)(\exists y)P(x, y) = T$ ，

这里对 x_1 有 y_1 ，对 x_2 有 y_2 ，...，并不要求 $y_1=y_2=...$

谓词公式的解释

- ❖ 谓词公式的真假与论域、自由个体变元、命题变元、谓词和函数有关。
- ❖ 对谓词公式的解释I包括五个部分：
 - 非空论域D
 - 对命题变元指派为{0, 1}
 - 对个体常元和(自由)个体变元指派为D中元素
 - 对谓词指派为D上的谓词(关系)
 - 对函数指派为D上的函数
- ❖ 公式A在解释I下是一个命题 A_I , 即有确定的真值. 称 A_I 的真值为A在解释I下的真值.

2016/11/15

Introduction To CS--Xiaofeng Gao

58

$$(3) (\exists x)(\forall y)P(x, y) = (\exists x)((\forall y)P(x, y))$$

显然这与 $(\forall y)(\exists x)P(x, y)$ 是不同的

如 $P(x, y)$ 表 $y > x$, 论域为实数。则任取 $x = x_0$ 时, 对所有的 y 均有 $y > x$ 不可能成立, 从而有

$$(\exists x)(\forall y)P(x, y) = F. \text{ 然而 } (\forall y)(\exists x)P(x, y) = T$$

$$(4) (\exists x)(\exists y)P(x, y) = (\exists x)((\exists y)P(x, y))$$

理解为有一个 x , 有一个 y 具有关系 P 。显然有

$$(\exists x)(\exists y)P(x, y) = (\exists y)(\exists x)P(x, y)$$

2016/11/15

Introduction To CS--Xiaofeng Gao

57

例:谓词公式的解释

考虑对 $(\forall x) (P(x) \rightarrow Q(f(x), a))$ 的解释I:

论域D指派为{1, 2};

个体常元a指派为1;

f 指派为D上函数 f^I : $f^I(1)=2, f^I(2)=1$.

P指派为D上一元关系 $P^I = \{ \langle 2 \rangle \}$

Q指派为D上二元关系 $Q^I = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 2 \rangle \}$

此外, 若x指派为1: $P^I(1) \rightarrow Q^I(f^I(1), 1) = T$

若x指派为2: $P^I(2) \rightarrow Q^I(f^I(2), 1) = T$

所以 $(\forall x) (P(x) \rightarrow Q(f(x), a))$ 在I下为真.

2016/11/15

Introduction To CS--Xiaofeng Gao

59

谓词公式的分类

- ❖ 谓词逻辑的公式按真假性分为三类
 - 永真式(重言式, 普遍有效式)
 - 永假式(矛盾式, 不可满足式)
 - 可满足式

2016/11/15

Introduction To CS--Xiaofeng Gao

60

普遍有效式

- ❖ 如果一个公式在任一解释下都为真, 则称为普遍有效的 (universally valid).
 - 普遍有效公式反映了一般逻辑规律.
- ❖ 例如:
 - $(\forall x) (P(x) \vee \neg P(x))$
 - $(\forall x) P(x) \rightarrow P(y)$ (y 是 x 个体域中的一个元素)
 - $((\forall x) P(x) \vee (\forall x) Q(x)) \rightarrow (\forall x) (P(x) \vee Q(x))$

不可满足式

- ❖ 如果一个公式在任一解释下都为假, 则称为不可满足的.
- ❖ 例如:
 - $(\forall x) (P(x) \wedge \neg P(x))$
 - $(\forall x) P(x) \wedge (\exists y) \neg P(y)$
- ❖ 定理:
 - 公式 A 普遍有效 iff $\neg A$ 不可满足

可满足式

- ❖ 如果一个公式在某个解释下为真, 则称为可满足的.
- ❖ 例如 :
 - $(\forall x) P(x)$
 - 取 D 为 {交大新生}, P 为 “高考成绩大于0”
 - $(\exists x) P(x)$
 - 取 D 为 {交大新生}, P 为 “是女生”



Thank You !

Xiaofeng Gao