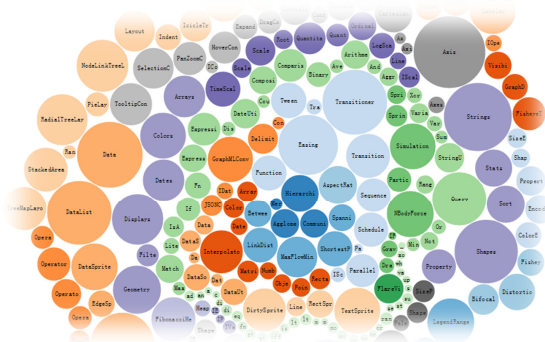




图论

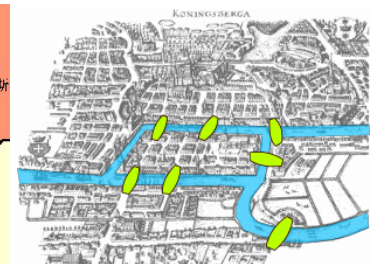
Graph Theory

高晓汎 (Xiaofeng Gao)

Department of Computer Science
Shanghai Jiao Tong Univ.

哥尼斯堡七桥问题

❖ 普雷格尔河(Pregel)从哥尼斯堡镇(Konigsberg, Prussia-now Kaliningrad Russia)中穿过，而河中有两个小岛，小岛与河岸间由7座桥彼此连接。于是有游客提出问题：能否从河岸或小岛出发，通过每一座桥，而且仅仅通过一次，最后回到原地。



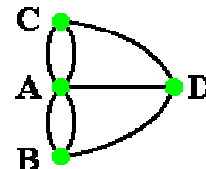
2016/11/29

IntroductionToCS--Xiaofeng Gao

2

欧拉解

❖ 瑞士数学家欧拉(Leonhard Euler)在1736年发表论文“哥尼斯堡的七座桥”，对这个问题给出了否定的回答。他将河岸和小岛作为图的顶点，七座桥为边，构成一个无向图，则问题化为图论中的问题。这是用图论方法建立的第一个模型。(图论的元年)



The Seven Bridges
of Königsberg

The branch of geometry that deals with magnitudes has been zealously studied throughout the past, but there is another branch that has been almost unknown up to now; I call it the "geometry of position" (*geometria situs*). This branch of geometry deals with relations dependent on position alone, and investigates the properties of position; it does not take magnitudes into consideration, nor does it involve calculation with quantities. But as yet no satisfactory definition has been given of the problems that belong to this geometry of position or of the method to be used in solving them. Recently there was announced a problem that, while it certainly seemed to belong to geometry, was nevertheless so designed that it did not call for the determination of a magnitude, nor could it be solved by quantitative calculation; consequently I did not hesitate to assign it to the geometry of position, especially since the solution required only the consideration of position, calculation being of no use. In this paper I shall give an account of the method that I discovered for solving this type of problem, which may serve as an example of the geometry of position.

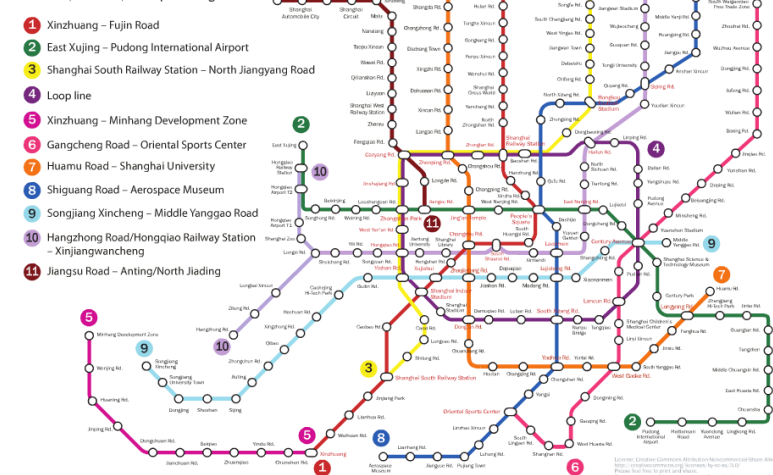
2. The problem, which I understand is quite well known, is stated as follows: In the town of Königsberg in Prussia there is an island A, called

More Examples

Shanghai Metro Map

Updated May 2011

To check ticket prices, find the fastest route, check train times, hear station names in Mandarin, and more, visit exploreshanghai.com



2016/11/29

IntroductionToCS--Xiaofeng Gao

3

2016/11/29

Algorithm--Xiaofeng Gao

4

More Examples (2)

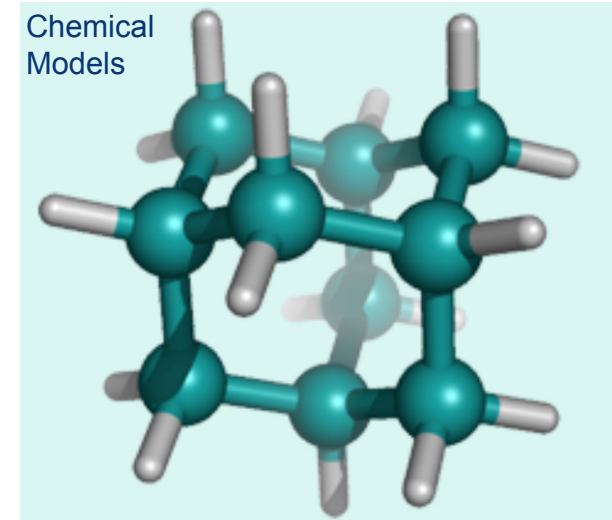


2016/11/29

Algorithm--Xiaofeng Gao

5

More Examples (3)

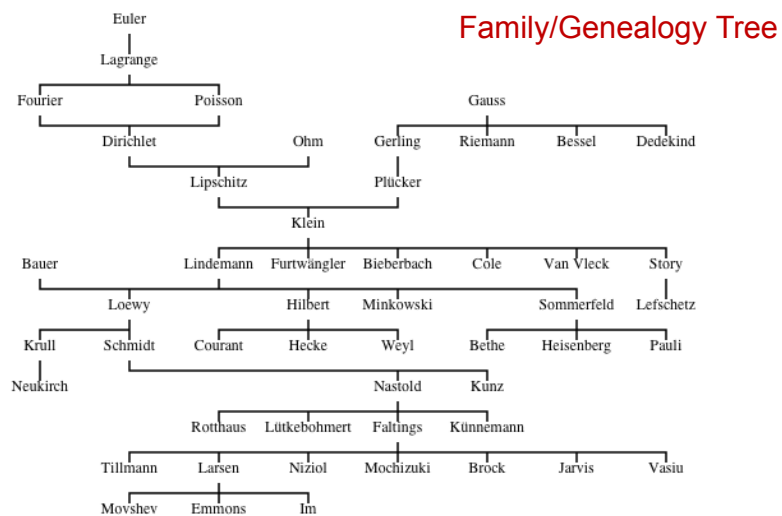


2016/11/29

Algorithm--Xiaofeng Gao

6

More Examples (4)

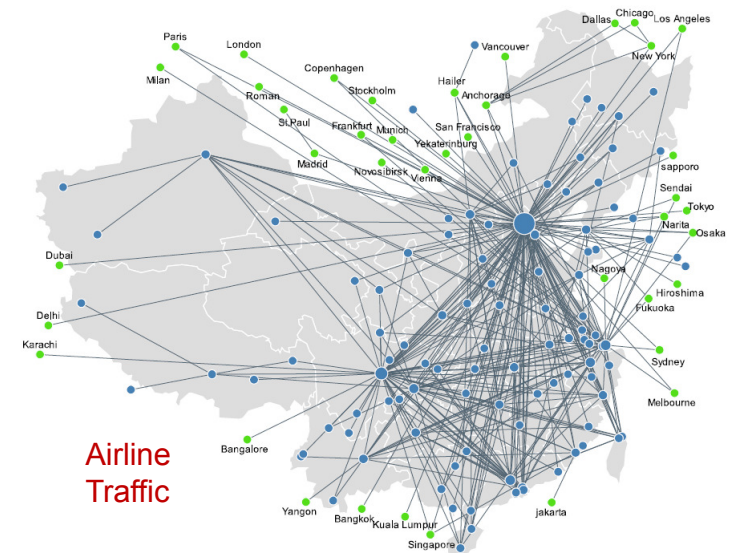


2016/11/29

Algorithm--Xiaofeng Gao

7

More Examples (5)



2016/11/29

Algorithm--Xiaofeng Gao

8

哈密顿图

- ❖ 1859年, 爱尔兰科学家哈密顿(Sir William Rowan Hamilton)发明了一个游戏: 有一个实心的正十二面体(12个正五边形的面,20个顶点,30条棱), 20个顶点标上世界著名大城市的名字, 要求游戏者从某一城市出发, 遍历各城市一次, 最后回到原地。
- ❖ 这就是“绕行世界”(Icosian)问题, 即找一条经过所有顶点(城市)的圈。

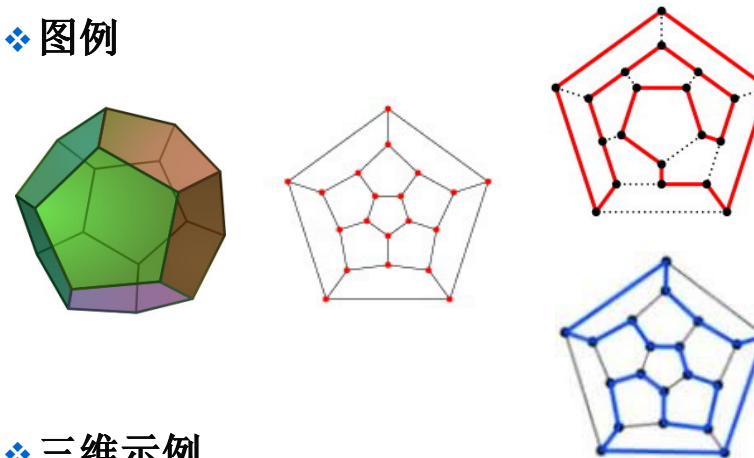
2016/11/29

DiscreteMaths--Xiaofeng Gao

9

周游世界游戏

❖ 图例



❖ 三维示例

▪ <http://mathworld.wolfram.com/IcosianGame.html>

2016/11/29

DiscreteMaths--Xiaofeng Gao

10

四色定理

- ❖ 地图四色定理在1853年由古德里(Francis Guthrie)提出



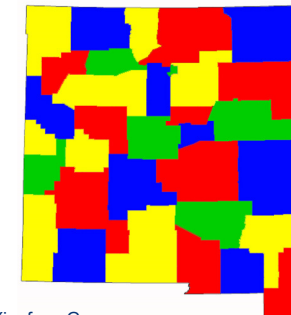
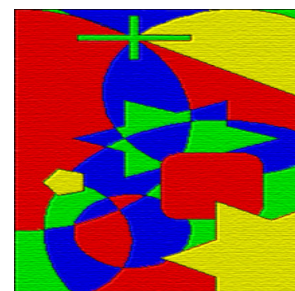
2016/11/29

Algorithm--Xiaofeng Gao

11

四色定理

- ❖ 任意划分一个图形并给各部分着上颜色, 使任何具有公共边界的部分颜色不同, 仅需要四种颜色。
- ❖ 1976年美国数学家阿佩尔(K. Appel)与哈肯(W. Haken)借助电子计算机获得了四色定理的证明, 为用计算机证明数学定理开拓了前景。



2016/11/29

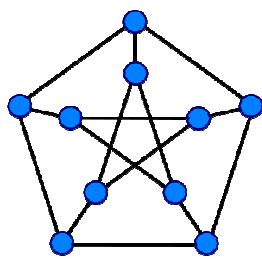
Algorithm--Xiaofeng Gao

12

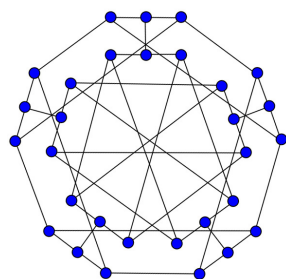
形象美丽而性质奇特的图

❖ 妖怪图 (Snark Graph)

- 每个点关联三条边
- 边染色需用四种颜色，使公共顶点的边异色
- 任意切断三条边不会断裂成两个有边的子图（除单点）

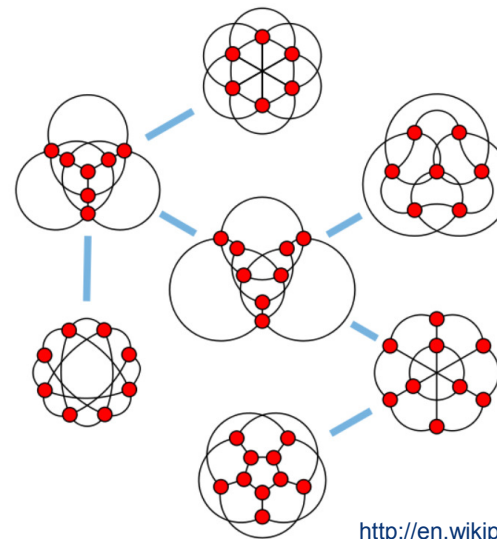


Single Star Snark
(Petersen Graph)



Double Star Snark

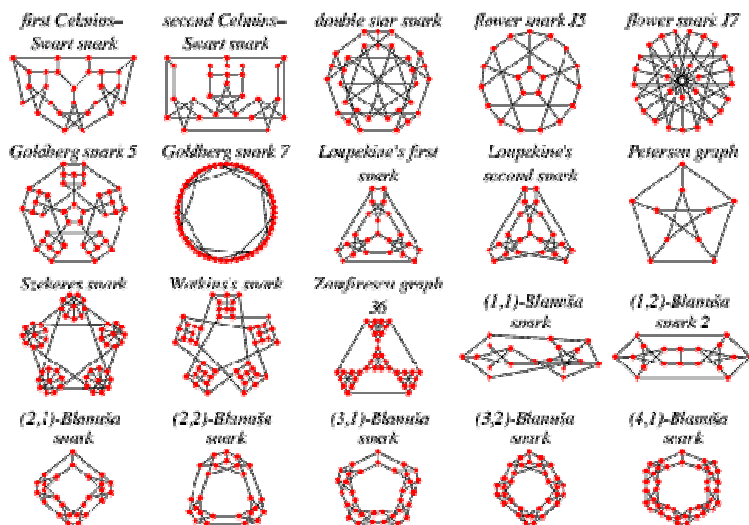
Petersen Family



Y- Δ 变换
(星角变换)

http://en.wikipedia.org/wiki/Petersen_graph

Snark Family



http://en.wikipedia.org/wiki/Snark_graph_theory

图论的发展

- ❖ 18、19世纪的数学家仅将图论视为一般的数学游戏，并未及时获得足够的发展。
- ❖ 1936年，匈牙利数学家柯尼希(Konig)出版图论第一本专著《有限图与无限图理论》，总结了图论200年的成果。
- ❖ 20世纪中后期，随着计算机领域的开拓，图论得到长足发展，现已成长为数学科学一个重要的独立学科。
- ❖ 分支：算法图论、极值图论、网络图论、代数图论、随机图论、模糊图论、超图论等

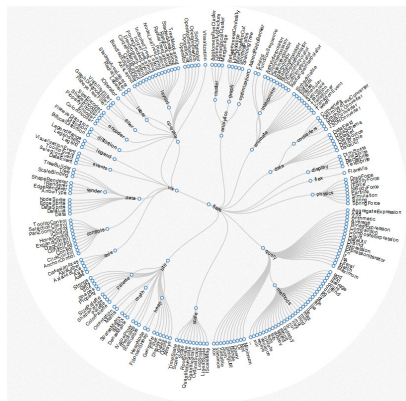
图论的研究对象

- ❖ 世界由事物组成，事物之间有联系。
- ❖ 图可以直观地描述事物及其间联系。
 - 用结点表示事物
 - 用边表示它们之间的联系
- ❖ 可见，图模型几乎可用于任何领域。
- ❖ 图论(graph theory)就是以这种结点和边构成的图研究对象。

图论是简朴而机敏的学科 —— 王树禾

目录

- 1 图的基本概念
- 2 图的基本性质
- 3 图的代数表示



无向图的基本概念

Basics Concepts for Undirected Graph

图的定义

- ❖ 【定义】称二元组 $G=(V, E)$ 是一个**无向图 (undirected graph)**，如果
 - V 是一个非空有限集合，
 - E 是 V 中元素的无序对所组成的集合。
- ❖ 把 V 的元素叫做图的**顶点 (vertex)**， E 的元素叫做图的**边 (edge)**。 $V(G)$ 表示图 G 的顶点集， $E(G)$ 表示图 G 的边集。
- ❖ 若 $|V(G)|=n$ ，则称 G 为 **n 阶图**。

有限图vs无限图

- ❖ 有限图: V 和 E 是有限集合
- ❖ 无限图: V 或 E 是无限集合
- ❖ 我们只讨论有限图:

$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}; \quad E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$$

- e_k 可记为无序或有序的顶点对 (v_i, v_j) .
 - 称 e_k 与 v_i, v_j **关联**; e_k 连接 v_i 和 v_j ;
 - v_i, v_j 是 e_k 的**端点**;
 - 称 v_i 和 v_j **相邻** (adjacent或neighbors)
- 以后不加说明时,都假定图有 n 个顶点, m 条边.

简单图vs多重图

- ❖ **孤立点**: 不与任何边关联的顶点。
- ❖ **环 (loop)**: 两端点重合的边,即 $e_k = (v_i, v_i)$ 。
- ❖ **重边 (multiple edges)**: 若两结点间有两条或两条以上的边, 则这些边称为重边。
- ❖ **多重图 (multigraph)**: 有重边的图。
- ❖ **简单图 (simple graph)**: 无重边无自环的无向图。
 - **空图 (null/empty graph)**: 无边的简单图,记作 N_n 。
 - 有的书定义空图是 $(\emptyset, \emptyset)$, 也称为**零图**
 - **完全图 (complete graph)**: 任意两结点间都有边的简单图。 n 个顶点的完全图记作 K_n 。
- ❖ **平凡图**: 只有一个顶点的图。

节点的度

- ❖ **【定义】** 在无向图 G 中, 对于每个 G 中的顶点 v , 与 v 相关联的边的数目称为 v 的**度 (degree)**, 记为 $d_G(v)$, 或 $d(v)$ 。并规定在计算关联边数目时, 环算作两条边。
- ❖ **注**: 度为1的顶点称为**悬点**, 与悬点关联的边称为**悬边**。度为奇数的点称为**奇点**, 度为偶数的点称为**偶点**。每个顶点的度都相同的图称为**正则图**, 若其顶点的度均为 k , 则称为 **k -正则图**。易知完全图 K_n 是 $(n-1)$ -正则图。

握手定理 (Handshaking Theorem)

- ❖ **【定理】** 在无向图 $G=(V, E)$ 中, 结点度数的总和等于边数的两倍, 即 $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$ 。
- ❖ **【证】** 当对图 $G=(V, E)$ 的所有顶点的度求和时, 每条边都为顶点的度之和贡献2, 因为一条边恰好关联2个 (可能相同) 顶点。这意味着顶点的度之和是边数的2倍。定理得证。上述定理有时也称为**握手定理**。

推论

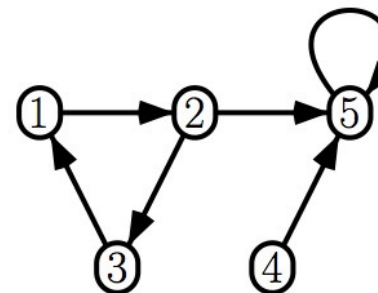
【推论】无向图中奇点数目是偶数。

【推论】非空简单图中一定存在度相同的点。

【推论】 K_n 的边数是 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 。

【例】设图G有10个顶点，每个顶点的度为6，那么图中共有多少条边？

【解】由握手定理得，在G中所有顶点的度的总和为 $6 \cdot 10 = 60$ ，因此图G中共有30条边。



有向图的基本概念

Basics Concepts for Directed Graph

无向图vs有向图

- ❖ **无向边**(undirected edge):边无方向.
 - 对无向边 $e_k = (v_i, v_j)$, v_i 和 v_j 称为 e_k 的端点.
- ❖ **有向边**(directed edge):边有方向.对 $e_k = (v_i, v_j)$:
 - v_i 称始点(initial vertex), v_j 称终点(terminal vertex).
 - v_i 是 v_j 的直接前趋, v_j 是 v_i 的直接后继.
- ❖ **无向图**(undirected graph):都是无向边.
- ❖ **有向图**(directed graph):都是有向边.
- ❖ **混合图**:既有无向边也有有向边.

基本概念

- ❖ 设G是有向图, $e=(u, v)$ 是E中元素, 则称u为e的**起点**或**尾**, e为u的**出边**;
- ❖ 并称v为e的**终点**或**头**, e为v的**入边**。对于环而言, 起点和终点是重合的。
- ❖ 若两条或两条以上的边有相同的头和尾, 则这些边称为**重边**。
- ❖ 没有重边和环的有向图称为**简单有向图**。

完全图与竞赛图

- ❖ 若对任意的 $u, v \in V$ ，均有 $(u, v) \in E$ 和 $(v, u) \in E$ ，则称 D 为**有向完全图**。
- ❖ 设 D 为有向简单图，若对任意的 $u, v \in V$ ，有向边 $(u, v) \in E$ 和 $(v, u) \in E$ 有且仅有一个成立，则称 D 为**竞赛图**。

结点的度

- ❖ 【定义】在有向图中，顶点 v 的出边数称为 v 的**出度**，记作 $d^+(v)$ 。
- ❖ 顶点 v 的入边数称为 v 的**入度**，记作 $d^-(v)$ 。
- ❖ 顶点 v 的关联边数称作 v 的**度**，记为 $d(v)$ ，即

$$d(v) = d^+(v) + d^-(v)$$

基本性质

【定理】对有向图，有

$$\sum_{v \in V} d^+(v) = \sum_{v \in V} d^-(v) = |E|$$

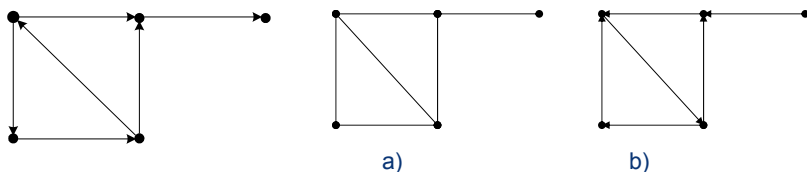
【证】因为每条边都有一个起点和一个终点，所以在带有有向边的图里，所有顶点的入度之和等于出度之和。显然也等于图的边数。

基础图与定向图

- ❖ 【定义】设 D 是有向图，若略去边的方向，则得到一个无向图，称其为图 D 的**基础图**。
- ❖ 如果 D 是无向图，给所有的边任意定方向后，则得到一个有向图，称为图 D 的**定向图**。

示例

【例】给出以下有向图的基础图，并给出其基础图的另一个定向图。



【解】上图的基础图为左图，再为其边指定方向，得到另外的定向图之一，如右图。

顶点的邻点

❖ 无向图G中,顶点v的邻点集定义为

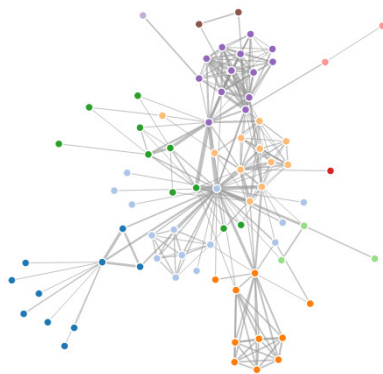
$$\Gamma(v) = \{u \mid (v,u) \in E(G)\}$$

❖ 有向图G中,顶点v的直接后继集或外邻集定义为

$$\Gamma^+(v) = \{u \mid (v,u) \in E(G)\}$$

❖ v的直接前趋集或内邻集定义为

$$\Gamma^-(v) = \{u \mid (u,v) \in E(G)\}$$



图的基本性质

Basic Properties of Graph

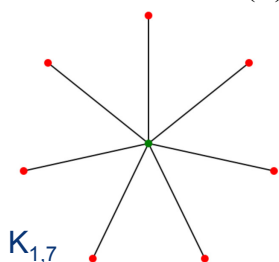
二部图(二分图)

【定义】设G是简单图，若其顶点集V可以划分为两个不相交的非空集合 V_1 和 V_2 ，而G中所有边都连接 V_1 中的一个顶点和 V_2 中的一个顶点（也就是说G中没有边连接着 V_1 中的两个顶点或 V_2 中的两个顶点），那么将G称作**二部图**或**偶图**。

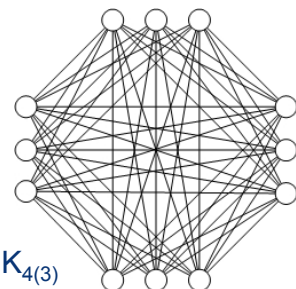
❖ 若图可以划分为两个不相交的非空集合，其元素个数分别为m和n，而在两个顶点之间有边相连当且仅当这两个顶点分属两个集合，则将图称为**完全二部图**，记作 $K_{m,n}$ 。

r部图

- ❖ **星**: $K_{1,n}$ 称作星
- ❖ **完全r部图**: 若顶点集合分成两两不交的r个子顶点集, 当且仅当两个顶点不在同一个子顶点集时, 这两个顶点相连, 则称图G是**完全r部图**, 记做 $K_{m_1, m_2, \dots, m_r}$ 。若每个子顶点集等势 (顶点个数为 m), 则记为 $K_{r(m)}$



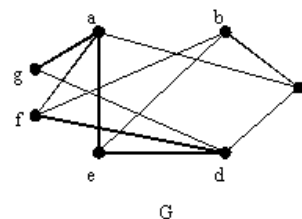
$K_{1,7}$



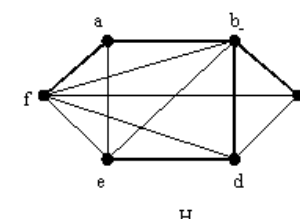
$K_{4(3)}$

示例

【例】判断下图G和H是否二部图。



G



H

答: G的顶点集可以分为两个不相交的集合 $\{a, b, d\}$ 和 $\{c, e, f, g\}$ 。而H不是二部图, 因为H中 a, e, f 三个顶点两两相邻, 根据鸽笼原理, 它们不可能分配到两个子集中使得边 (a, e) 、 (e, f) 、 (a, f) 均连接不同子集的两个顶点。

示例

【例】 K_3 不是二部图。注意若把 K_3 的顶点集分成两个不相交的集合, 则两个集合之一必然包含两个顶点。假如这个图是二部图, 那么这两个顶点就不能用边连接, 但是在 K_3 里每一个顶点都用边连接着其他每个顶点。同理可知 K_n 也不是二部图。

子图

- ❖ **【定义】** 若 $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$, 则称图H是图G的**子图(subgraph)**, 记作 $H \subseteq G$ 。若 $H \subseteq G$, 且 $H \neq G$, 则称H是G的**真子图**, 记为 $H \subset G$ 或 $H \subsetneq G$ 。
- ❖ 若 $H \subseteq G$, $V(H) = V(G)$, 则称H是G的**生成子图**或**支撑子图(spanning subgraph)**。
- ❖ 如果 $V(H) \subseteq V(G)$, 且H包含了G在节点集 $V(H)$ 中的所有边, 则称H是G的**导出子图(induced subgraph)**。
- ❖ 平凡子图: G 和 N_n

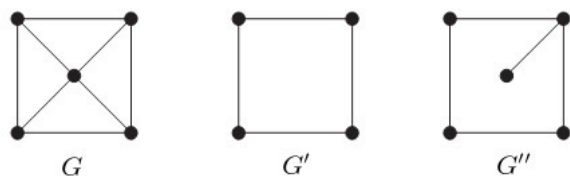
例:子图

❖ 下图中

G' 和 G'' 都是 G 的子图

G' 是 G 的导出子图,而 G'' 不是

G'' 是 G 的支撑子图,而 G' 不是



图的运算

❖ 【定义】设 $G_1=(V_1, E_1)$ 和 $G_2=(V_2, E_2)$ 是两个简单图, 则它们的并定义为 $G=(V, E)$, 其中 $V=V_1 \cup V_2$, $E=E_1 \cup E_2$, 记作 $G=G_1 \cup G_2$

$$G=G_1 \cup G_2=(V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$$

❖ 它们的交定义为 $G=(V, E)$, 其中 $V=V_1 \cap V_2$, $E=E_1 \cap E_2$, 记作 $G=G_1 \cap G_2$ 。

$$G=G_1 \cap G_2=(V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$$

❖ 它们的对称差定义为 $G=(V, E)$, 其中 $V=V_1 \oplus V_2$, $E=E_1 \oplus E_2$, 记作 $G=G_1 \oplus G_2$

$$G=G_1 \oplus G_2=(V_1 \cup V_2, E_1 \oplus E_2) \\ = (V_1 \cup V_2, (E_1 - E_2) \cup (E_2 - E_1))$$

图的运算(续)

❖ 若 G_2 是 G_1 的子图, 则定义

▪ 差: $G_1 - G_2=(V_1, E_1 - E_2)$

▪ n 个结点的简单图 G 的补图 $\bar{G}$: $K_n - G$

• 显然: $G = \overline{\bar{G}}$

❖ 从 G 中删去结点 v 及其关联的边: $G - v$

▪ 显然: $G - v$ 是 G 的导出子图

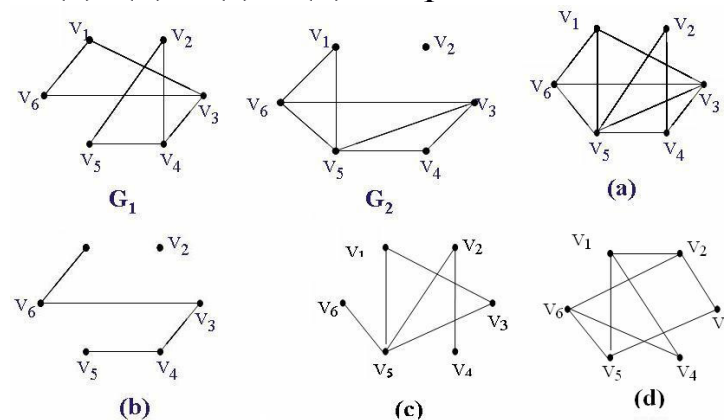
❖ 从 G 中删去边 e : $G - e$

▪ 显然: $G - e$ 是 G 的支撑子图

❖ 向 G 中增加边 $e_{ij}=(v_i, v_j)$: $G + e_{ij}$

示例

❖ 【例】下图中 G_1 和 G_2 并、交和对称差分别是(a), (b)和(c)。(d)是 G_1 的补图。



图的同构

- ❖ 【定义】对于简单图 $G_1=(V_1, E_1)$, $G_2=(V_2, E_2)$, 如果能建立 V_1 到 V_2 的双射 f , 其中 G_1 中的顶点 a 和 b 相邻, 当且仅当 G_2 中的顶点 $f(a)$ 和 $f(b)$ 也相邻, 则称 G_1 与 G_2 同构(isomorphic), 记作 $G_1 \cong G_2$
- ❖ 若 $G_1 \cong G_2$, 则有
 - $|V(G_1)| = |V(G_2)|, |E(G_1)| = |E(G_2)|$;
 - G_1 和 G_2 结点度的非增序列相同;
 - G_1 的任一导出子图在 G_2 中都有与之同构的导出子图;反之亦然.

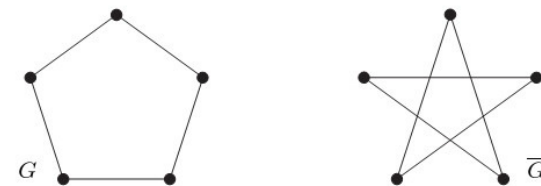
2016/11/29

IntroductionToCS--Xiaofeng Gao

45

例:同构

- ❖ 下图显示了图 G 与它的补图同构.



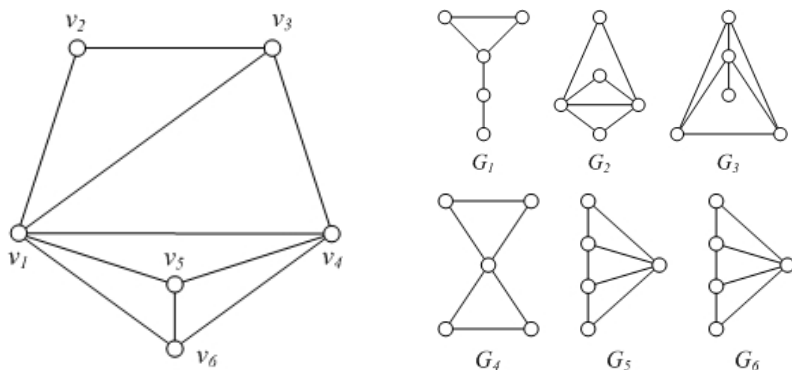
2016/11/29

IntroductionToCS--Xiaofeng Gao

46

Ulam猜想 (1929)

- ❖ G 与 H 是两个顶点个数相等的图。令 $V(G)=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$; $V(H)=\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ 如果 $G-v_i \cong H-u_i$ ($i=1, \dots, n$), 则 $G \cong H$ 。



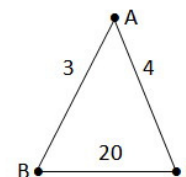
2016/11/29

IntroductionToCS--Xiaofeng Gao

47

赋权图

- ❖ 【定义】如果给图 $G=(V, E)$ 的每条边 e_k 都赋以一个实数 w_k 作为该边的权(weight), 则称 G 是赋权图.
 - 特别地, 如果权都是正数, 称为正权图.
- ❖ 应用中往往是赋权图. 权可以表示长度、时间、费用等.
- ❖ 【例】右图中
 - $w_{AB}=3$
 - $w_{BC}=20$
 - $w_{AC}=4$



2016/11/29

IntroductionToCS--Xiaofeng Gao

48

例题

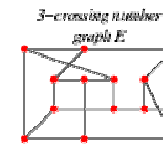
❖ 【例】证明任意6个人中必有三人相互认识或者有三个人互不相识。

❖ 【证】作 K_6 并给边涂色:红=认识,蓝=不认识.只要证图中必有同色三角形.

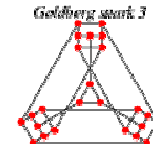
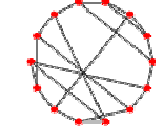
v_1 有5条边,由抽屉原则必有三边同色(设为红),这三边的另一顶点设为 v_2, v_3, v_4 .

$\triangle v_2 v_3 v_4$ 有一边为红色,则与 v_1 构成红色 $\triangle$;

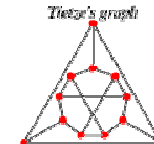
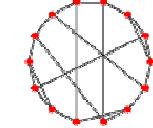
$\triangle v_2 v_3 v_4$ 的三边无红色,则构成蓝色 $\triangle$.



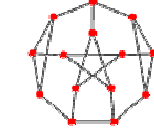
14-cubic graph 257



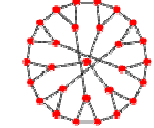
14-cubic graph 372



14-cubic graph 388



28-cubic graph J



The End !

Xiaofeng Gao