道路与回路

Path and Circuit

高晓沨（Xiaofeng Gao）

Department of Computer Science
Shanghai Jiao Tong Univ.

目录

道路与回路的定义

Definition of Path and Circuit

有向道路与有向回路

- 【定义】有向图G中边序列$P=(e_{i_1}, e_{i_2},\ldots, e_{i_q})$，其中$e_{i_j} = (v_k,v_l)$满足: v_k是$e_{i_{j-1}}$的终点, v_l是$e_{i_{j+1}}$的始点,就称P是G的一条**有向道路**。如果e_{i_q}的终点也是e_{i_1}的始点,则称P是G的一条**有向回路**.
- **简单有向道路/回路**:P中边不重复出现.
- **初级有向道路/回路**: P中结点不重复出现.

道路与回路

- 【定义】无向图G中,若点边交替序列

  $P = (v_{i_1}, e_{i_1}, v_{i_2}, e_{i_2}, \dots, e_{i_{q-1}}, v_{i_q})$

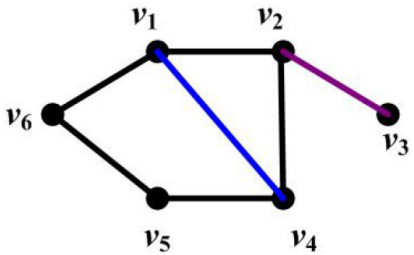
  满足: v_{i_j}和$v_{i_{j+1}}$是e_{i_j}的两个端点,则称P是G中的一条链或道路(path).如果$v_{i_q} = v_{i_1}$,则称P是G中的一个圈或回路(circuit).
- 简单道路/回路:P中没有重复出现的边.
- 初级道路/回路:P中没有重复出现的结点.
- 注：道路又称通道；回路又称闭通道（开通道即非回路的道路）；简单道路又称迹；初级道路又称路、路径；初级回路有时也称为圈。

其他定义

- 长度为奇数的圈（初级回路）称为奇圈；长度为偶数的圈（初级回路）成为偶圈。
- 在含圈的无向简单图G中，称G中最长圈的长度为G的周长，记做c(G)，G中最短圈的长度为G的围长，记做g(G)。
- 无向完全图K_n (n≥3)的周长为n，围长为3。完全二部图$K_{n,n}$ (n≥2)的周长为2n，围长为4。

简单图中的弦

- 【定义】设C是简单图G中含结点数大于3的一个初级回路。如果结点v_i和v_j在C中不相邻，而边$(v_i,v_j)\in E(G)$，则称(v_i, v_j)是C的一条弦。
- 【定理】若对每一个$v_k\in V(G)$，都有$d(v_k)\geq 3$，则G中必含带弦的回路。

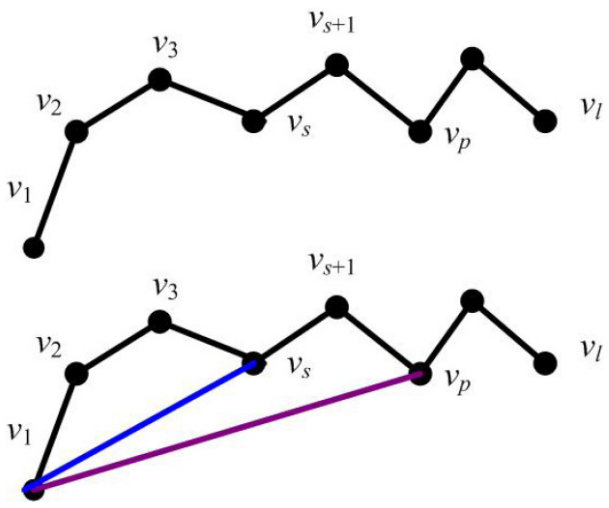


证明

- 在G中找到一条极长的初级道路$P=(e_1,e_2,\dots,e_l)$。不妨设$e_1=(v_1,v_2)$，$e_i=(v_i,v_{i+1})$。
- 由于P是极长的初级道路，所以v_1和v_l的邻接点都在该道路上。
- 由已知条件，$d(v_1)\geq 3$，不妨设

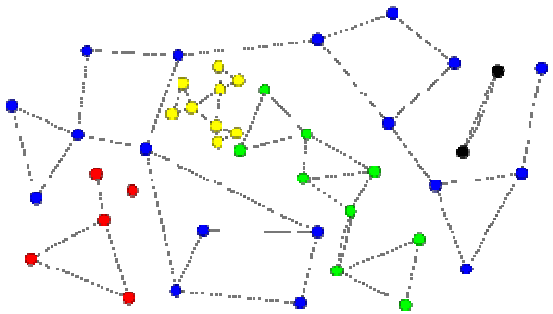
  $\Gamma(v_1) = \{v_2, v_s, v_p, \dots\}$，其中s<p。
- 这时$(v_1,\dots,v_s,\dots,v_p,\dots,v_1)$是一条初级回路，而$(v_1,v_s)$就是该回路中的一条弦。

图例



二分图的回路

- 【定理】如果二分图G中存在回路，那么它们都是由偶数条边组成的。
- 【证明】设二分图G将V(G) 分为X，Y两个点集（二分点集），设C是二分图G的任一回路，不妨设$v_0 \in X$是C的起点，由于G是二分图，所以沿回路C必须经过偶数条边才能达到某结点$v_i \in X$，因而只有经过偶数条边才能回到v_0。



图的连通性

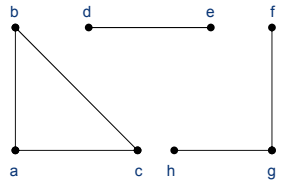
Connectivity of the Graph

连通性

- 若无向图G的任意两个结点之间都存在道路，就称G是连通的(connected).
- 对有向图G,若不考虑边的方向时是连通的，则称G是(弱)连通的.
- 若G的连通子图H不是G的任何连通子图的真子图,则称H是G的极大连通子图,或称连通分支(connected component).
  - 显然G的每个连通分支都是它的导出子图.
  - 任何非连通图都是2个以上连通支的并
  - 连通分支又称连通支、连通分量。

连通分量 (Connected Component)

【例】指出下图的连通分量。



【解】根据定义，可以看出上图共有3个连通分量，分别为

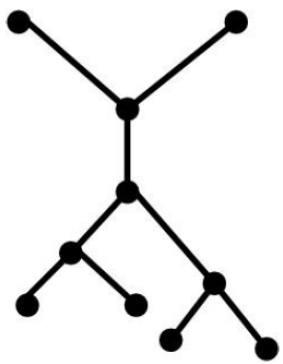
({a,b,c}, {(a,b), (a,c), (b,c)}),

({d,e}, {(d,e)}),

({f,g,h}, {(h,g), (f,g)})。

特殊的连通图：树

- 如果连通图中不含回路，而且任意两个结点间都只有唯一的一条初级道路，则称该连通图为**树**。
- **树是边数最少的连通图。**



距离

【定义】 设u，v为图G中的任意两个顶点，若u，v连通，称设u，v之间长度最短的通道为u，v之间的**短程线**，短程线的长度称为u，v之间的**距离**，记做d(u, v)，当u，v不连通时，定d(u, v)＝∞。

连通图性质

【例】设G=(V,E)(|V|=n, |E|=m) 是简单图，证明当 $m > \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ 时，G是连通图。

假定G是非连通图，则G至少含有两个连通分量，设分别为

$G_1 = (V_1, E_1)$，$G_2 = (V_2, E_2)$, $|V_1| = n_1, |V_2| = n_2, n_1 + n_2 = n$，由G是简单图知：

$|E_1| \le \frac{1}{2} n_1(n_1 - 1), |E_2| \le \frac{1}{2} n_2(n_2 - 1),$

假设$m \le \frac{1}{2} n_1(n_1 - 1) + \frac{1}{2} n_2(n_2 - 1)$,由于$n_1 \le n-1, n_2 \le n-1,$

因此$m \le \frac{1}{2}(n-1)(n_1 - 1 + n_2 - 1) = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$

与已知矛盾，故G是连通图.

连通图性质

【定理】设G=(V, E) (|V|=n, |E|=m) 是连通图，则m≥n-1

【证】若G为简单图时，G连通必有m≥n-1；当G为非简单图时，G连通更要要求m≥n-1，下面仅就G为简单图时加以证明。

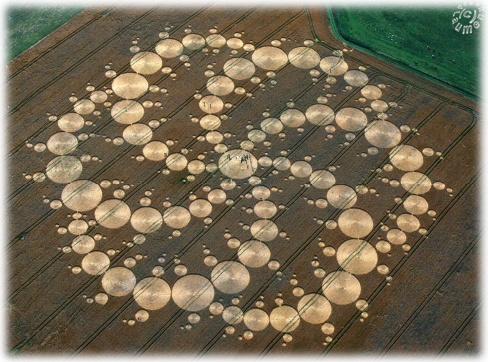
对顶点数n作归纳法。

n=1时，G为平凡图，此时m＝0，所以结论成立。

证明

- 设n≤k (k≥1) 时结论成立，下面证明n=k+1时结论成立 。
- 设v为G中任意一个顶点，记G'=G-v，设G'有s个连通分量$G_1,G_2,\ldots,G_s$，设$|V_i|=n_i$，$|E_i|=m_i$ (i=1,2,…,s),则$n_i\leq k$ 。由归纳假设可知$m_i\geq n_i-1$，由于从G中删除v产生s个连通分支，所以至少同时删除了s条边，于是

$$m \geq \sum_{i=1}^{s} m_i + s \geq \sum_{i=1}^{s} n_i - s + s = \sum_{i=1}^{s} n_i = n-1$$



路与圈的相关定理

Theorems and Properties of Path and Circuit

通道长度定理

【定理】设G=(V, E) (|V|=n),若顶点u和v (u≠v)之间若有通道，则它们之间存在长度小于n的通道。

【证】设$W=v_0e_1v_1\ldots e_kv_k$为G中长度为k的通道，且始点$v_0=u$，终点$v_k=v$。

若k<n，则W为满足要求的通道；

证明

- 否则若k≥n，或k＞n+1, 即W上顶点数大于G中的顶点数，必存在s和t (0≤s＜t≤k)，使得$v_s=v_t$；
- 即在W中存在到自身的闭通道C_{st}，在W中删除C_{st}中的一切边和除外v_s的所有顶点，得到W’，则W’仍然为顶点u到v的通道，且W ’的长度比W至少减少1。
- 则若W’的长度小于n，则W ’满足要求，否则对重复上述过程，因为G是有限图，经过有限步后，必得u到v长度小于n的通道。

通道与路相关定理推论

- 【推论】图G=(V, E) (|V|=n)中，若顶点u和v (u≠v)之间有通道，则它们之间存在长度小于n的路。
- 【证明】由之前定理知，u和v存在长度小于n的通道W，若W已经是路，则W满足要求；否则必存在若干个始点（终点）在W上的闭通道，删除这些闭通道上除始点（终点）外的一切顶点和所有边，其结果W’为u和v的长度小于n的路。

通道与路相关定理推论 (2)

- 【定理】图G=(V, E) (|V|=n)中，若存在顶点u到自身的闭通道，则一定存在u到自身的长度小于等于n的闭通道。
- 【证明】类似之前定理，设$W=v_0e_1v_1\ldots e_kv_0$为G中长度为k的闭通道，若k<n，则W为满足要求的闭通道；若k≥n，找到相同的v_s和v_t(s=t≠0)，并删除闭圈C_{st}中的一切边和除外v_s的所有顶点。重复该过程直至W’满足要求为止。

通道与路相关定理推论 (3)

- 【推论】图G=(V, E) (|V|=n)中，若存在顶点u到自身的闭迹，则一定存在u到自身的长度小于等于n的闭迹。
- 【证明】由之前定理知，u和v存在长度小于n的闭通道W，若W已经是闭迹，则W满足要求；否则必存在若干个始点（终点）在W上的闭通道，删除这些闭通道上除始点（终点）外的一切顶点和所有边，其结果W’为u和v的长度小于n的闭迹。

扩大路法

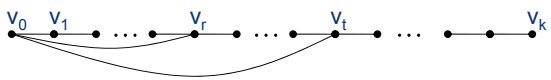
- 图论中很有用的证明方法：
- 设为G=(V, E)为n阶无向图，E≠∅，设Γ_k为G中一条路，若此路的始点或终点与通道外的顶点相邻，就将它们扩到通道中来，继续这一过程，直到最后得到的通道的两个端点不与通道外的顶点相邻为止，设最后得到的路径为Γ_{k+r}（长度为k的路扩大成了长度为k+r的路径），称Γ_{k+r}为“极大路”，称使用此种方法证明问题的方法为“扩大路法”。

范例

- 【例】设G为n (n≥4)阶无向简单图，G中任何一个顶点的度数均不小于3。证明G中存在长度大于或等于4的圈。
- 【证】不妨设G是连通图，否则，因为G的各连通分支的最小度(min{d(v)|v∈V})也都大于或等于3，因而可对它的某个连通分支进行讨论。
- 设u, v为G中任意两个顶点，由G是连通图，因而u, v之间存在通道，由推论可知，u, v之间存在路，用“扩大路法”扩大这条路，

证明

- 设最后得到的“极大路”为$\Gamma_k=v_0v_1\ldots v_k$，易知k≥3，若$v_0$与$v_k$相邻，则$\Gamma_k=v_0v_1\ldots v_k\cup(v_0, v_k)$为长度大于或等于4的圈。若$v_0$与$v_k$不相邻，由于$d(v_0)\geq 3$，因而$v_0$除与$\Gamma_k$上的$v_1$相邻外，还存$\Gamma_k$上的顶点$v_r(2\leq r<k)$和$v_t(r<t<k)$与$v_0$相邻，则$\Gamma_k=v_0v_1\ldots v_r\ldots v_tv_0$为一个圈且长度大于或等于4，见下图所示。



二部图与圈

- 【定理】一个图为二部图当且仅当图G中无奇圈。
- 必要性。

设二部图$G=(V_1, V_2, E)$，若G中无圈，结论成立，否则，设C为G中任意一个圈，设$C=u_1u_2\ldots u_{k-1}u_ku_1$。不妨设$u_1\in V_1$，则$u_3,u_5,\ldots,u_{k-1}$均属于$V_1$，而$u_2,u_4,\ldots,u_k$均属于$V_2$，于是k是偶数，且k是C的长度，因而C是偶圈，由于C的任意性，结论成立。

证明

- 充分性。
- 设G中无奇圈，不妨设G是连通的，否则可对它的每个连通分量进行讨论。设u为G中任意一个顶点，令

  $V_1=\{v \mid v\in V(G) \wedge d(u,v)\text{为偶数}\}$

  $V_2=\{v \mid v\in V(G) \wedge d(u,v)\text{为奇数}\}$

  则$V_1\cap V_2=\varnothing$且$V_1\cup V_2=V$
- 下面只要证明$\forall e\in E$，e的一个端点在V_1中，另一个端点在V_2中。

证明

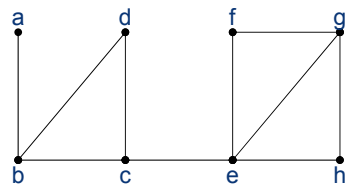
- 若不然，存在边$e=(u_r, u_s)$，其中u_r, u_s均属于V_1(或者V_2)，设W_{u,u_r}和W_{u,u_s}分别为u到u_r和u到u_s到的短程线，显然W_{u,u_r}和W_{u,u_s} 的长度均为偶数。
- 如果W_{u,u_r}和W_{u,u_s}无交点，则$W_{u,u_r}\cup(u_r,u_s)\cup W_{u,u_s}$为图G中一个奇圈，这与G中无奇圈矛盾。如果 W_{u,u_r}和W_{u,u_s}有交点，则由于$W_{u,u_r}\cup(u_r,u_s)\cup W_{u,u_s}$的长度为奇数，易知其中必含图G的奇圈，仍得出矛盾。证毕。

割点、割边与桥

- 如果移除某个顶点及所有与该顶点相关联的边所产生的子图比原图有更多的连通分量，这样的顶点称为**割点**。显然，从一个连通图中移除一个割点就会产生一个不连通的子图。
- 类似地，将一条边移除后所产生的子图比原图有更多的连通分量，这样的边称为**割边**或**桥**。

范例

【例】 指出下图中的割点和桥。



割点为：b, c和e

桥：{a, b}和 {c, e}

Thank You !

Xiaofeng Gao