第9章 集　　合

第 9 章到第 12 章介绍集合论. 主要介绍集合论的基本概念和结论，这包含集合、运算、关系、函数和基数. 对概念和定理的介绍将以数理逻辑的谓词逻辑为工具来描述，体现了这两个数学分支之间的联系，且可使集合论的研究既简练又严格. 还将简要介绍集合论公理系统，这个公理系统又称公理集合论，是数理逻辑的一个分支.

9.1 集合的概念和表示方法

9.1.1 集合的概念

集合是集合论中最基本的概念，但很难给出精确的定义. 集合是集合论中唯一不给出定义的概念，但它是容易理解和掌握的.

集合是一些确定的、可以区分的事物汇聚在一起组成的一个整体. 组成一个集合的每个事物称为该集合的一个元素，或简称一个元.

如果 a 是集合 A 的一个元素，就说 a 属于 A，或者说 a 在 A 中，记作

$$a \in A.$$

如果 b 不是集合 A 的一个元素，就说 b 不属于 A，或者说 b 不在 A 中，记作

$$b \notin A.$$

集合概念是很简单的，但准确理解其含义却是十分重要的.

特别应注意下列几点：

(1) 集合的元素可以是任何事物，也可以是另外的集合（以后将说明，集合的元素不能是该集合自身）.

(2) 一个集合的各个元素是可以互相区分开的. 这意味着，在一个集合中不会重复出现相同的元素.

(3) 组成一个集合的各个元素在该集合中是无次序的.

(4) 任一事物是否属于一个集合，回答是确定的. 也就是说，对一个集合来说，任一事物或者是它的元素或者不是它的元素，二者必居其一而不可兼而有之，且结论是确定的.

下面将用实例说明这些含义.

9.1.2 集合的表示方法

我们一般用不同的大写字母表示不同的集合，并用不同的小写字母表示集合中不同的元素. 但是因为某个集合的一个元素可能是另一个集合，所以这种约定不是绝对的.

本书中规定，用几个特定的字母表示几个常用的集合. 约定

N 表示全体自然数组成的集合，

$\mathbf{Z}$ 表示全体整数组成的集合，

$\mathbf{Q}$ 表示全体有理数组成的集合，

$\mathbf{R}$ 表示全体实数组成的集合，

$\mathbf{C}$ 表示全体复数组成的集合.

在本书中，规定 0 是自然数，即 $0\in\mathbf{N}$. 但在另一些书中，规定 0 不是自然数.

通常表示集合的方法有两种.

一种方法是外延表示法. 这种方法一一列举出集合的全体元素. 例如

$$A=\{7,8,9\},$$
$$\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\cdots\},$$

表示集合 A 有三个元素 7,8,9. 集合 $\mathbf{N}$ 的元素是 $0,1,2,3,\cdots$. 集合 $\mathbf{N}$ 就是自然数的集合，$\mathbf{N}$ 的表示式中使用了省略符号，这表示 $\mathbf{N}$ 中有无限多个元素 4,5,6,7 等. 有限集合中也可以使用省略符号，例如

$$\{a,b,c,\cdots,y,z\}$$

表示由 26 个小写英文字母组成的集合.

另一种方法是内涵表示法. 这种方法是用谓词来描述集合中元素的性质. 上述的集合 A 和 $\mathbf{N}$ 可以分别表示为

$$A=\{x\mid x\text{ 是整数且 }6<x<10\},$$
$$\mathbf{N}=\{x\mid x\text{ 是自然数}\},$$

一般情况，如果 $P(x)$ 表示一个谓词，那么就可以用 $\{x\mid P(x)\}$ 或 $\{x:P(x)\}$ 表示一个集合. $\{x\mid P(x)\}$ 是使 $P(x)$ 为真的所有元素组成的集合. 也就是说，若 $P(a)$ 为真，则 a 属于该集合；若 $P(a)$ 为假，则 a 不属于该集合. 在表示式中的 $\mid$ 和 $:$ 是一个分隔符号. 在它前面的 x 是集合中元素的形式名称(如集合 A 中元素的形式名称是 x，但实际名称是 7,8,9. 常用 x,y,z 表示形式名称). 在分隔符号后面的 $P(x)$ 是仅含自由变元 x 的谓词公式.

9.1.3 集合的实例

例 1 $B=\{9,8,8,7\}$.

集合 B 中的两个 8 应看作 B 中的同一个元素，所以 B 中只有三个元素. 集合 B 就是 $\{9,8,7\}$. 它与上述的集合 A 是同样的集合，因为元素之间没有次序.

例 2 $D=\{x\mid x\notin B\}$.

集合 D 是用集合 B 来定义的. 若 $x\notin B$，则 $x\in D$；若 $x\in B$，则 $x\notin D$. 集合 D 中的元素是除 7,8,9 外的一切事物.

例 3 $F=\{7,\{8,\{9\}\}\}$.

集合 F 和集合 B 不同. $7\in F$，但 $8\notin F$，$9\notin F$. 只有 $8\in\{8,\{9\}\}$ 和 $9\in\{9\}$. 集合 F 仅含有两个元素 7 和 $\{8,\{9\}\}$，这两个元素由表示 F 的最外层花括号包围，并由逗号分隔开. 对于以集合为元素的集合(即有多层花括号的集合)，应注意集合的层次.

例 4 $G=\{x\mid x=1\vee(\exists y)(y\in G\wedge x=\{y\})\}$.

集合 G 是用递归方法定义的. 这个定义是构造性的，可以由该定义求 G 的每个元素，从而构造出 G. 构造 G 的过程是

由 $1 \in G$，有 $\{1\} \in G$，

由 $\{1\} \in G$，有 $\{\{1\}\} \in G$，

……

这个构造过程是无止境的，因此 G 的元素有无限多个.

例 5 $H=\{x \mid x\text{是一个集合} \wedge x \notin x\}$.

可用反证法证明集合 H 是不存在的. 假设存在这样的集合 H. 下面将证明，对某一具体事物 y，无法确定 y 是否属于 H. 我们以 H 本身作为这个具体事物 y，证明中 y 就是 H. 对于集合 H，必有 $y \in H$ 或 $y \notin H$，下面分别考虑之. (1) 若 $y \in H$. 由于 y 是 H 的元素，y 就具有 H 中元素的性质 $y \notin y$. 考虑到 y 就是 H，所以 $y \notin H$. 这与 $y \in H$ 矛盾. (2) 由于 y 不是 H 的元素，y 就没有 H 中元素的性质，因此 $y \in y$. 又因 y 就是 H，则 $y \in H$. 这与 $y \notin H$ 矛盾. 两种情况都存在矛盾，所以 $y \in H$ 和 $y \notin H$ 都不成立，集合 H 不存在. 问题的根源在于，集合论不能研究“所有集合组成的集合”. 这是集合论中的一个悖论，称为 Russell 悖论.

9.2 集合间的关系和特殊集合

9.2.1 集合间的关系

在实数之间可以定义关系 $=$、$<$、$\leqslant$、$>$、$\geqslant$. 类似地，在集合之间可以定义关系 $=$、$\subseteq$、$\subset$、$\supseteq$、$\supset$.

定义 9.2.1 两个集合是相等的，当且仅当它们有相同的元素. 若两个集合 A 和 B 相等，则记作 A=B；若 A 和 B 不相等，则记作 A≠B.

这个定义也可以写成

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B),$$

$$A \neq B \Leftrightarrow (\exists x) \neg (x \in A \leftrightarrow x \in B).$$

这个定义就是集合论中的外延公理，也叫外延原理. 它实质上是说“一个集合是由它的元素完全决定的”. 因此，可以用不同的表示方法（外延的或内涵的），用不同的性质、条件和内涵表示同一个集合. 例如

$$\{7,8,9\},$$

$$\{x \mid x\text{是整数} \wedge 6 < x < 10\},$$

$$\{x \mid (x-7)(x-8)(x-9)=0\},$$

表示同一个集合，即三个集合相等.

定义 9.2.2 对任意两个集合 A 和 B，若 A 的每个元素都是 B 的元素，就称 A 为 B 的子集合，或称 B 包含 A，或称 B 是 A 的超集合，记作

$$A \subseteq B \quad \text{或} \quad B \supseteq A.$$

这个定义也可以写成

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B).$$

当 A 不是 B 的子集合时，即 $A \subseteq B$ 不成立时，记作 $A \nsubseteq B$（子集合可简称为子集）.

注意区分 $\subseteq$ 和 $\in$. 例如

$$\{a\} \nsubseteq \{\{a\},b\} \quad \text{但} \quad \{a\} \in \{\{a\},b\},$$

$$\{a,b\} \subseteq \{a,b,\{a\}\} \quad 但 \quad \{a,b\} \notin \{a,b,\{a\}\}.$$

$A \in B$ 表示 A 是 B 的一个元素;$A \subseteq B$ 表示 A 的每个元素都是 B 的元素. 此外,$\in$ 是集合论的原始符号,这是一个基本概念;但是$\subseteq$是由$\in$定义出来的概念.

下面给出有关$=$和$\subseteq$的两个主要结论.

定理 9.2.1 两个集合相等的充要条件是它们互为子集,即 $A=B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$.

证明 $A=B$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B) \\
&\Leftrightarrow (\forall x)((x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in A)) \\
&\Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (\forall x)(x \in B \rightarrow x \in A) \\
&\Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A.
\end{aligned}$$

这个定理很重要. 以后证明两个集合相等时,主要使用这个定理,判定两个集合互为子集.

定理 9.2.2 对任意的集合 A,B 和 C:

(1) $A \subseteq A$.

(2) $(A \subseteq B \wedge B \subseteq A) \Rightarrow A=B$.

(3) $(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$.

在这个定理中,(1)是自反性,(2) 是反对称性(这是定理 9.2.1 的一部分),(3) 是传递性. 定理 9.2.2 说明包含关系$\subseteq$具有这 3 个性质(实数间的$\leqslant$关系也有这 3 个性质).

应该指出,$\in$ 没有这 3 个性质. (1) 以后将证明,对任意的集合 A,$A \notin A$. (2)以后将证明,对任意的集合 A 和 B,$\neg(A \in B \wedge B \in A)$. (3) 对任意的集合 A、B 和 C,当 $A \in B$ 和 $B \in C$ 时,不一定有 $A \in C$. 以后将指出,C 为传递集合时才能推出 $A \in C$.

定义 9.2.3 对任意两个集合 A 和 B,若 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$,就称 A 为 B 的真子集,或称 B 真包含 A,或称 B 是 A 的真超集合,记作

$$A \subset B \text{ 或 } B \supset A.$$

这个定义也可以写成

$$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B).$$

定义 9.2.4 若两个集合 A 和 B 没有公共元素,就称 A 和 B 是不相交的.

这个定义也可以写成

$$A \text{ 和 } B \text{ 不相交} \Leftrightarrow \neg(\exists x)(x \in A \wedge x \in B).$$

若 A 和 B 不是不相交的,就称 A 和 B 是相交的.

例如

$\{1,2\} \subset \{1,2,3\}$,

$\{1,2\} \subseteq \{1,2\}$,

$\{1,2\}$和$\{3,4,5\}$不相交,

$\{1,2\}$和$\{2,3,4\}$相交.

9.2.2 特殊集合

空集和全集是两个特殊集合. 它们的概念很简单,但在集合论中的地位却很重要. 下

介绍这两个集合.

定义 9.2.5 不含任何元素的集合称为空集,记作$\varnothing$.

空集的定义也可以写成

$$\varnothing=\{x|x\neq x\}.$$

显然,$(\forall x)(x\notin\varnothing)$为真.

下面介绍有关空集的两个重要结论.

定理 9.2.3 对任意的集合 A,$\varnothing\subseteq A$.

证明 假设存在集合 A,使$\varnothing\nsubseteq A$. 则存在 x,使 $x\in\varnothing$且 $x\notin A$. 这与空集$\varnothing$的定义矛盾. 所以定理得证.

推论 9.2.1 空集是唯一的.

证明留作思考题(只要假设有两个空集$\varnothing$和$\varnothing'$,证明$\varnothing=\varnothing'$即可).

定义 9.2.6 在给定的问题中,所考虑的所有事物的集合称为全集,记作 E.

全集的定义也可以写成

$$E=\{x|x=x\}.$$

全集的概念相当于谓词逻辑的论域. 对不同的问题,往往使用不同的论域. 例如在研究有关实数的问题时,就以 $\mathbf{R}$ 为全集.

9.3 集合的运算

运算是数学上常用的手段. 两个实数进行加法运算可以得到一个新的实数. 类似地,两个集合也可以进行运算,得到交集、并集等新的集合. 集合的运算是由已知集合构造新集合的一种方法. 我们经常从若干简单集合出发,用运算构造大量新集合,这类似于用逻辑联结词构造出大量合式公式. 集合的运算式子也是表示这些新集合的一种方法,而且往往是更简捷的表示方法. 所以,集合的运算式子是表示集合的第三种方法. 这种表示方法不仅简捷,而且可利用运算的性质简化一些证明问题.

9.3.1 集合的基本运算

下面介绍的 5 种运算是集合论中的基本运算.

定义 9.3.1 对集合 A 和 B,

(1) 并集 $A\cup B$ 定义为

$$A\cup B=\{x|x\in A\vee x\in B\}.$$

(2) 交集 $A\cap B$ 定义为

$$A\cap B=\{x|x\in A\wedge x\in B\}.$$

(3) 差集(又称 B 对 A 的相对补集,补集)$A-B$ 定义为

$$A-B=\{x|x\in A\wedge x\notin B\}.$$

(4) 余集(又称 A 的绝对补集)$-A$ 定义为

$$-A=E-A=\{x|x\notin A\},$$

(其中 E 为全集. A 的余集就是 A 对 E 的相对补集.)

(5) 对称差 $A \oplus B$ 定义为

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \{x \mid x \in A \,\overline{\vee}\, x \in B\}.$$

这 5 个运算中，余集是一个一元运算，其余 4 个都是二元运算.

例 1 已知集合 A,B 和全集 E 为

$$A = \{a,b,c,d\},$$
$$B = \{e,f,a,d\},$$
$$E = \{a,b,c,d,e,f,g\},$$

则有

$$A \cup B = \{a,b,c,d,e,f\} = B \cup A,$$
$$A \cap B = \{a,d\} = B \cap A,$$
$$A - B = \{b,c\},\ B - A = \{e,f\},$$
$$-A = \{e,f,g\},\ -B = \{b,c,g\},$$
$$A \oplus B = \{b,c,e,f\} = B \oplus A.$$

并集 $A \cup B$ 中的元素是 A 和 B 中所有的元素，公共元素只出现一次. 交集 $A \cap B$ 中的元素是 A 和 B 所有的公共元素. 差集 $A-B$ 中的元素是在 A 中但不在 B 中的那些元素. 余集 $-A$ 中的元素是在全集中但不在 A 中的那些元素. 对称差 $A \oplus B$ 中的元素即由 $A-B$ 的元素和 $B-A$ 的元素组成.

9.3.2 广义并和广义交

广义并和广义交是一元运算，是对一个集合的集合 A 进行的运算. 它们分别求 A 中所有元素的并和交. A 中可以有任意多个元素，它们就可以求任意个元素的并和交. A 中若有无限多个元素，它们就可以求无限多个元素的并和交. 广义并和广义交是并集和交集的推广.

定义 9.3.2 若集合 A 的元素都是集合，则把 A 的所有元素的元素组成的集合称为 A 的广义并，记作 $\bigcup A$；把 A 的所有元素的公共元素组成的集合称为 A 的广义交，记作 $\bigcap A$.

这个定义也可以写成

$$\bigcup A = \{x \mid (\exists z)(z \in A \wedge x \in z)\},$$
$$\bigcap A = \{x \mid (\forall z)(z \in A \rightarrow x \in z)\}.$$

此外，规定 $\bigcup \varnothing = \varnothing$，规定 $\bigcap \varnothing$ 无意义.

例 2 已知集合 A 为

$$A = \{\{a,b,c\},\{a,b\},\{b,c,d\}\},$$

则有

$$\bigcup A = \{a,b,c,d\},$$
$$\bigcap A = \{b\}.$$

可以用广义并和广义交分别定义并集和交集

$$A \cup B = \bigcup \{A,B\},$$
$$A \cap B = \bigcap \{A,B\}.$$

广义并和并集的运算符都是 $\bigcup$. 但因广义并是一元运算，并集是二元运算，所以对 $\bigcup$ 的含义

不会产生误解.

9.3.3 幂集

集合的幂集是该集合所有子集组成的集合. 幂集是由一个集合构造的新集合,它也是集合的一元运算. 但是幂集与原集合的层次有所不同.

定义 9.3.3 若 A 是集合,则把 A 的所有子集组成的集合称为 A 的幂集,记作 $P(A)$.

这个定义也可以写成

$$P(A) = \{x \mid x \subseteq A\}.$$

例 3 $P(\varnothing)=\{\varnothing\}$,

$$P(\{\varnothing\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\},$$

$$P(\{a,b\}) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}.$$

对任意的集合 A,有 $\varnothing\subseteq A$ 和 $A\subseteq A$,因此有 $\varnothing\in P(A)$ 和 $A\in P(A)$.

9.3.4 笛卡儿积

笛卡儿积也是一种集合二元运算. 两个集合的笛卡儿积是它们的元素组成的有序对的集合. 笛卡儿积是与原集合层次不同的集合. 笛卡儿积是下一章介绍关系概念的基础. 下面先介绍有序对,再介绍笛卡儿积.

两个元素 x 和 y(允许 $x=y$)按给定次序排列组成的二元组合称为一个有序对,记作 $\langle x,y\rangle$. 其中 x 是它的第一元素,y 是它的第二元素.

有序对 $\langle x,y\rangle$ 应具有下列性质:

(1) $x\neq y\Rightarrow\langle x,y\rangle\neq\langle y,x\rangle$,

(2) $\langle x,y\rangle=\langle u,v\rangle\Leftrightarrow x=u\wedge y=v$.

在平面直角坐标系上一个点的坐标就是一个有序对.

下面用集合定义有序对,使之具有上述的性质.

定义 9.3.4 有序对 $\langle x,y\rangle$ 定义为

$$\langle x,y\rangle = \{\{x\}, \{x,y\}\}.$$

定理 9.3.1

(1) $\langle x,y\rangle=\langle u,v\rangle\Leftrightarrow x=u\wedge y=v$,

(2) $x\neq y\Rightarrow\langle x,y\rangle\neq\langle y,x\rangle$.

证明 (1) 设 $x=u\wedge y=v$,则显然有

$$\{\{x\}, \{x,y\}\} = \{\{u\}, \{u,v\}\},$$

于是 $\langle x,y\rangle=\langle u,v\rangle$.

设 $\langle x,y\rangle=\langle u,v\rangle$,则有

$$\{\{x\}, \{x,y\}\} = \{\{u\}, \{u,v\}\}.$$

分别考虑 $x=y$ 和 $x\neq y$ 两种情况.

当 $x=y$ 时,$\langle x,y\rangle=\{\{x\}\}$,于是

$$\{x\} = \{u\} = \{u,v\},$$

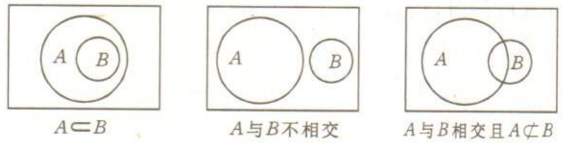

图 9.4.1 文氏图

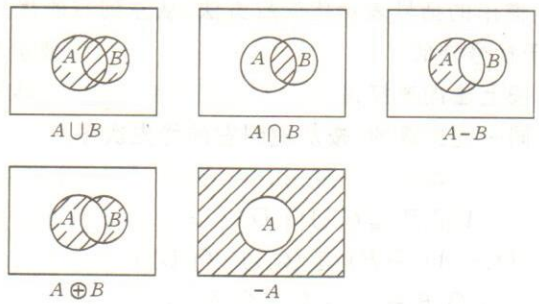

图 9.4.2 文氏图

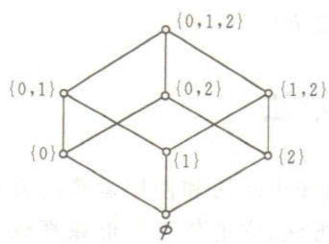

图 9.4.3 幂集

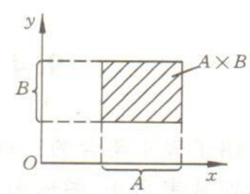

图 9.4.4 笛卡儿积

9.4.3 笛卡儿积的图示法

在平面直角坐标系上，如果用 x 轴上的线段表示集合 A，并用 y 轴上的线段表示集合 B，则由两个线段画出的矩形就可以表示笛卡儿积 $A\times B$. 如图 9.4.4 所示.

9.5 集合运算的性质和证明

9.5.1 基本运算的性质

集合的三种运算 $A\cup B, A\cap B, -A$ 分别是用逻辑连接词 $\vee, \wedge, \neg$ 定义的，因此它们具有和 $\vee, \wedge, \neg$ 类似的性质. 下面给出它们满足的一些基本规律.

定理 9.5.1 对任意的集合 A, B 和 C，有

(1) 交换律 $A\cup B=B\cup A$,

$A\cap B=B\cap A$.

(2) 结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

(3) 分配律　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

(4) 幂等律　$A\cup A=A$，

$A\cap A=A$.

(5) 吸收律　$A\cup(A\cap B)=A$，

$A\cap(A\cup B)=A$.

(6) 摩根律　$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$，

$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$，

$-(B\cup C)=-B\cap -C$，

$-(B\cap C)=-B\cup -C$.

(7) 同一律　$A\cup\varnothing=A$，

$A\cap E=A$.

(8) 零律　$A\cup E=E$，

$A\cap\varnothing=\varnothing$.

(9) 补余律　$A\cup -A=E$，

$A\cap -A=\varnothing$.

(10)　$-\varnothing=E$，

$-E=\varnothing$.

(11) 双补律　$-(-A)=A$.

下面只证明其中两个规律，其他的证明留作思考题.

求证(3)　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

证明　对于任意的 x 可得

$$
\begin{aligned}
& x\in A\cup(B\cap C)\\
\Leftrightarrow\, & x\in A\vee x\in(B\cap C)\\
\Leftrightarrow\, & x\in A\vee(x\in B\wedge x\in C)\\
\Leftrightarrow\, & (x\in A\vee x\in B)\wedge(x\in A\vee x\in C)\\
\Leftrightarrow\, & x\in(A\cup B)\wedge x\in(A\cup C)\\
\Leftrightarrow\, & x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)
\end{aligned}
$$

于是结论得证.

求证(5)　$A\cap(A\cup B)=A$.

证明

$$
\begin{aligned}
A\cap(A\cup B) &=(A\cup\varnothing)\cap(A\cup B) && \text{(由(7))}\\
&=A\cup(\varnothing\cap B) && \text{(由(3))}\\
&=A\cup\varnothing && \text{(由(8))}\\
&=A && \text{(由(7))}
\end{aligned}
$$

这里采用了两种证明方法.一种是利用谓词演算的方法，另一种是利用已知的集合恒等

一部分基本规则只能用谓词逻辑来证明.其他规律和集合恒等式可能用两种方法来证.

可以用文氏图说明集合恒等式.图 9.5.1 用文氏图说明

$$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$$

从图中看出,等式两边对应图中同一个区域,因此应该相等.这种图形表示法只能说明问题,不能证明问题.

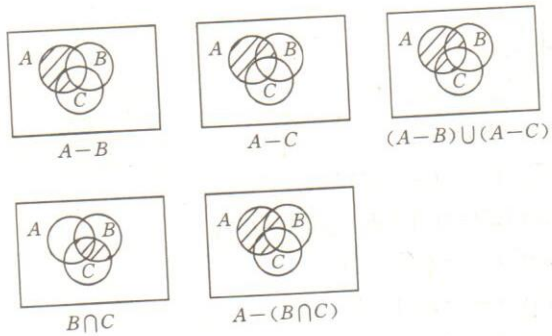

图 9.5.1

下面给出差集的性质.

定理 9.5.2 对任意的集合 A,B 和 C,有

(1) $A-B=A-(A\cap B)$.

(2) $A-B=A\cap -B$.

(3) $A\cup(B-A)=A\cup B$.

(4) $A\cap(B-C)=(A\cap B)-C$.

证明

(1) 对任意的 x

$$\begin{aligned}x\in A-(A\cap B)&\Leftrightarrow x\in A\wedge\neg(x\in A\cap B)\\&\Leftrightarrow x\in A\wedge\neg(x\in A\wedge x\in B)\\&\Leftrightarrow x\in A\wedge(x\notin A\vee x\notin B)\\&\Leftrightarrow(x\in A\wedge x\notin A)\vee(x\in A\wedge x\notin B)\\&\Leftrightarrow F\vee(x\in A-B)\Leftrightarrow x\in A-B\end{aligned}$$

(2) 对任意的 x

$$\begin{aligned}x\in A-B&\Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B\\&\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in -B\Leftrightarrow x\in A\cap -B\end{aligned}$$

(3) $A\cup(B-A)=A\cup(B\cap -A)$

$=(A\cup B)\cap(A\cup -A)=(A\cup B)\cap E$

$=A\cup B$

(4) $A\cap(B-C)=A\cap(B\cap -C)$

$=(A\cap B)\cap -C=(A\cap B)-C$

定理中的(2)是很有用的结论,它可以用 $A\cap -B$ 代入式中的 $A-B$,从而消去差集运算符,利用定理 9.5.1 的规律.这类似于命题逻辑中消去联结词"→".

对称差的性质类似于并集,下面给出一些基本性质.

定理 9.5.3 对任意的集合 A,B 和 C,有

(1) 交换律　$A \oplus B = B \oplus A$.

(2) 结合律　$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$.

(3) 分配律　$A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$.

(4) 同一律　$A \oplus \varnothing = A$.

(5) 零律　$A \oplus A = \varnothing$.

(6)　$A \oplus (A \oplus B) = B$.

证明　只证(3),其他留作思考题.

(3) $A \cap (B \oplus C)$

$$
\begin{aligned}
&= A \cap ((B - C) \cup (C - B)) \\
&= A \cap ((B \cap -C) \cup (C \cap -B)) \\
&= (A \cap B \cap -C) \cup (A \cap C \cap -B) \\
&= ((A \cap B \cap -C) \cup (A \cap B \cap -A)) \\
&\quad \cup ((A \cap C \cap -B) \cup (A \cap C \cap -A)) \\
&= ((A \cap B) \cap (-C \cup -A)) \cup ((A \cap C) \cap (-B \cup -A)) \\
&= ((A \cap B) \cap -(A \cap C)) \cup ((A \cap C) \cap -(A \cap B)) \\
&= (A \cap B) \oplus (A \cap C)
\end{aligned}
$$

集合间的$\subseteq$关系类似于实数间的$\leqslant$关系.下面给出它的一些性质.

定理 9.5.4　对任意的集合 A,B,C 和 D,有

(1) $A \subseteq B \Rightarrow (A \cup C) \subseteq (B \cup C)$.

(2) $A \subseteq B \Rightarrow (A \cap C) \subseteq (B \cap C)$.

(3) $(A \subseteq B) \wedge (C \subseteq D) \Rightarrow (A \cup C) \subseteq (B \cup D)$.

(4) $(A \subseteq B) \wedge (C \subseteq D) \Rightarrow (A \cap C) \subseteq (B \cap D)$.

(5) $(A \subseteq B) \wedge (C \subseteq D) \Rightarrow (A - D) \subseteq (B - C)$.

(6) $C \subseteq D \Rightarrow (A - D) \subseteq (A - C)$.

下面给出几个证明的例子.从中可以看到几类问题的证明方法.

例 1　对任意的集合 A 和 B,有

$$(A \cup B = B) \Leftrightarrow (A \subseteq B) \Leftrightarrow (A \cap B = A) \Leftrightarrow (A - B = \varnothing).$$

证明　本例要求证明 4 个命题互相等价.设命题(1)是 $A \cup B = B$,命题(2)是 $A \subseteq B$,命题(3)是 $A \cap B = A$,命题(4)是 $A - B = \varnothing$.只要证明(1)⇒(2),(2)⇒(3),(3)⇒(4),(4)⇒(1)即可.

(1) ⇒(2):

已知 $A \cup B = B$.对任意的 x,得

$$x \in A \Rightarrow x \in A \vee x \in B \Leftrightarrow x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in B.$$

因此 $A \subseteq B$.

(2) ⇒(3):

已知 $A \subseteq B$.对任意的 x,得

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in A,$$

$$x \in A \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in A \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Leftrightarrow x \in A \cap B.$$

因此 $A \cap B = A$.

(3) ⇒(4)：

已知 $A\cap B=A$,故

$$A-B=A\cap -B=(A\cap B)\cap -B=A\cap (B\cap -B)=\varnothing.$$

(4) ⇒(1)：

已知 $A-B=\varnothing$,故

$A\cup B=B\cup A=B\cup (A-B)$(由定理 9.5.2)$=B\cup \varnothing=B$.

例 2 对任意的集合 A,B 和 C,有

$$A\cup B=A\cup C, A\cap B=A\cap C\Rightarrow B=C.$$

证明 方法 1：

$$\begin{aligned}B&=B\cap (A\cup B)=B\cap (A\cup C)\\&=(B\cap A)\cup (B\cap C)\\&=(A\cap C)\cup (B\cap C)=(A\cup B)\cap C\\&=(A\cup C)\cap C=C.\end{aligned}$$

方法 2：

假设 $B\neq C$. 不妨设存在 x 使 $x\in B\wedge x\notin C$. 如果 $x\in A$,则 $x\in A\cap B$ 且 $x\notin A\cap C$,与已知矛盾. 如果 $x\notin A$,则 $x\in A\cup B$ 且 $x\notin A\cup C$,也与已知矛盾. 因此 $B=C$.

由 $A\cup B=A\cup C$ 能否推出 $B=C$ 呢？能否由 $A\cap B=A\cap C$ 推出 $B=C$ 呢？请思考.

例 3 对任意的集合 A,B 和 C,给出

$$(A-B)\oplus (A-C)=\varnothing$$

成立的充要条件.

解 $(A-B)\oplus(A-C)=\varnothing$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow((A-B)-(A-C))\cup((A-C)-(A-B))=\varnothing\\&\Leftrightarrow((A-B)-(A-C))=\varnothing\wedge((A-C)-(A-B))=\varnothing\\&\Leftrightarrow(A-B)\subseteq(A-C)\wedge(A-C)\subseteq(A-B)\quad(\text{例 }1)\\&\Leftrightarrow A-B=A-C.\end{aligned}$$

于是,充要条件是 $A-B=A-C$.

第10章　关　系

关系是在集合上定义的一个常用的概念. 例如,在自然数之间可以定义相等关系和小于关系,在命题公式之间可以定义等价关系和永真蕴涵关系,在集合 A 的各子集之间可以定义相等关系和包含关系. 此外,在学生和课程之间存在选课关系,在课程表上反映了课程、班级、教师、教室、时间等之间的关系. 关系就是联系,也就是映射. 在数据库的一种重要类型关系数据库中保存了各数据项之间的关系,关系数据库中的数据结构就是按照本章所定义的关系设计的.

10.1　二元关系

10.1.1　二元关系的定义

定义 10.1.1　对集合 A 和 B,$A\times B$ 的任一子集称为 A 到 B 的一个二元关系,一般记作 R. 若 $\langle x,y\rangle\in R$,可记作 xRy;若 $\langle x,y\rangle\notin R$,可记作 $x\not R y$. 在 $A=B$ 时,$A\times A$ 的任一子集称为 A 上的一个二元关系. 二元关系可简称关系.

从形式上说,二元关系是笛卡儿积的子集,换句话说,它是有序对的集合. 从语义上说,二元关系是集合 A 和 B 元素之间的联系. 从下面的例子可以看出这种联系.

例 1　设 $A=\{0,1\}$,$B=\{a,b\}$. 则

$$R_1=\{\langle 0,a\rangle\},$$
$$R_2=\{\langle 0,a\rangle,\langle 0,b\rangle,\langle 1,a\rangle\}$$

是 A 到 B 的两个二元关系.

$$R_3=\{\langle 0,1\rangle,\langle 1,0\rangle\}$$
$$R_4=\{\langle 0,1\rangle,\langle 0,0\rangle,\langle 1,0\rangle\}$$

是 A 上的两个二元关系.

例 2　设 $X=\{1,2,3\}$. 定义 X 上的关系 D_x 和 L_x 为

$$D_x=\{\langle x,y\rangle\mid x\in X\wedge y\in X\wedge x\text{ 整除 }y\}$$
$$L_x=\{\langle x,y\rangle\mid x\in X\wedge y\in X\wedge x\leqslant y\}$$

于是,D_x 是

$$D_x=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle\}.$$

L_x 关系是

$$L_x=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,3\rangle\}.$$

例 3　对任意的集合 A,在 $P(A)$上的包含关系 R_1 和真包含关系 R_2 定义为

$$R_1=\{\langle x,y\rangle\mid x\in P(A)\wedge y\in P(A)\wedge x\subseteq y\},$$
$$R_2=\{\langle x,y\rangle\mid x\in P(A)\wedge y\in P(A)\wedge x\subset y\}.$$

若 $A=\{\varnothing\}$，则 $P(A)=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$，$P(A)$上的 R_1 和 R_2 是

$$R_1=\{\langle\varnothing,\varnothing\rangle,\langle\varnothing,\{\varnothing\}\rangle,\langle\{\varnothing\},\{\varnothing\}\rangle\},$$

$$R_2=\{\langle\varnothing,\{\varnothing\}\rangle\}.$$

二元关系是二元组的集合.推广这个概念，可以用 n 元组的集合定义 n 元关系.

定义 10.1.2 若 $n\in N$ 且 $n>1$，$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个集合，则 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 的任一子集称为从 A_1 到 A_n 上的一个 n 元关系.

10.1.2 特殊的关系

下面定义三个 A 上的特殊的关系.

定义 10.1.3 对任意的集合 A.

(1) A 上的恒等关系 I_A 定义为

$$I_A=\{\langle x,x\rangle\mid x\in A\},$$

(2) A 上的全域关系(全关系)E_A 定义为

$$E_A=\{\langle x,y\rangle\mid x\in A\wedge y\in A\},$$

(3) $\varnothing$是 A 上的空关系.

例 4 设 $A=\{a,b\}$，则

$$I_A=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle\},$$

$$E_A=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,b\rangle\}.$$

10.1.3 定义域和值域

定义 10.1.4 对 A 到 B 的一个关系 R，可以定义

(1) R 的定义域 $\mathrm{dom}(R)$为

$$\mathrm{dom}(R)=\{x\mid(\exists y)(\langle x,y\rangle\in R)\},$$

(2) R 的值域 $\mathrm{ran}(R)$为

$$\mathrm{ran}(R)=\{y\mid(\exists x)(\langle x,y\rangle\in R)\},$$

(3) R 的域 $\mathrm{fld}(R)$为

$$\mathrm{fld}(R)=\mathrm{dom}(R)\cup\mathrm{ran}(R).$$

例 5 设 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{b,c,d\}$，A 到 B 的关系 $R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle b,d\rangle\}$. 则

$$\mathrm{dom}(R)=\{a,b\},$$

$$\mathrm{ran}(R)=\{b,c,d\},$$

$$\mathrm{fld}(R)=\{a,b,c,d\}.$$

定理 10.1.1 对 A 到 B 的关系 R，如果$\langle x,y\rangle\in R$，则 $x\in\bigcup\bigcup R$，$y\in\bigcup\bigcup R$.

证明 已知$\langle x,y\rangle\in R$，即$\{\{x\},\{x,y\}\}\in R$. 因$\{x,y\}$是 R 的元素的元素，故$\{x,y\}\in\bigcup R$. 因 x 和 y 是$\bigcup R$ 的元素的元素，故 $x\in\bigcup\bigcup R$，$y\in\bigcup\bigcup R$.

定理 10.1.2 对 A 到 B 的关系 R，则

$$\mathrm{fld}(R)=\bigcup\bigcup R.$$

证明 对任意的 x，若 $x\in\mathrm{fld}(R)$，则 $x\in\mathrm{dom}(R)$或 $x\in\mathrm{ran}(R)$. 则存在 y，使$\langle x,y\rangle\in R$

或$\langle y,x\rangle\in R$. 这时都有 $x\in\bigcup\bigcup R$.

对任意的 t，若 $t\in\bigcup\bigcup R$. 因为 R 的元素的形式是$\{\{x\},\{x,y\}\}$，所以必存在 u，使$\{\{t\},\{t,u\}\}\in R$ 或$\{\{u\},\{u,t\}\}\in R$. 也就是 $t\in \mathrm{fld}(R)$.

10.2 关系矩阵和关系图

描述关系的方法有三种：集合表达式、关系矩阵和关系图. 关系的定义使用了集合表达式. 这一节介绍后两种方法. 对有限集合上的关系，采用关系矩阵和关系图的方法，不仅使分析更加方便，而且有利于使用计算机处理.

10.2.1 关系矩阵

定义 10.2.1 设集合 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$，$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$.

(1) 若 R 是 X 到 Y 的一个关系，则 R 的关系矩阵是 $m\times n$ 矩阵(m 行、n 列的矩阵)

$$\boldsymbol{M}(R)=(r_{ij})_{m\times n}$$

矩阵元素是 r_{ij}，且

$$r_{ij}=\begin{cases}1, & 当\langle x_i,y_j\rangle\in R\\ 0, & 当\langle x_i,y_j\rangle\notin R\end{cases}$$

其中 $1\leqslant i\leqslant m$，$1\leqslant j\leqslant n$.

(2) 若 R 是 X 上的一个关系，则 R 的关系矩阵是 $m\times m$ 方阵(m 行、m 列的矩阵)

$$\boldsymbol{M}(R)=(r_{ij})_{m\times m}$$

矩阵元素是 r_{ij}，且

$$r_{ij}=\begin{cases}1, & 当\langle x_i,x_j\rangle\in R\\ 0, & 当\langle x_i,x_j\rangle\notin R\end{cases}$$

其中 $1\leqslant i\leqslant m$，$1\leqslant j\leqslant m$.

A 到 B 的关系 R 是 $A\times B$ 的子集，$A\times B$ 有 $m\times n$ 个有序对. 矩阵 $\boldsymbol{M}(R)$有 m 行(行为横向)、n 列(列为竖向)，共有 $m\times n$ 个元素. 因此，$\boldsymbol{M}(R)$的每个元素恰好对应 $A\times B$ 的一个有序对. 用 $\boldsymbol{M}(R)$中元素 r_{ij}的值表示有序对$\langle x_i,y_j\rangle$是否在 R 中，因为只有$\in$和$\notin$两种情况，所以 r_{ij}只取值 0 和 1 是合理的.

例 1 设 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$，$Y=\{y_1,y_2,y_3\}$. X 到 Y 的关系 R 为

$$R=\{\langle x_1,y_1\rangle,\ \langle x_1,y_3\rangle,\ \langle x_2,y_3\rangle,\ \langle x_4,y_2\rangle\}.$$

则 R 的关系矩阵是

$$\boldsymbol{M}(R)=\begin{array}{c@{}l}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} & \begin{array}{l}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{array}\\ \begin{array}{ccc}\ y_1 & y_2 & y_3\end{array} & \end{array}$$

在矩阵右方和下方标注了 X 和 Y 的元素. 标注表明，x_1 对应第 1 行，x_2 对应第 2 行，y_1 对应第 1 列，依此类推. 因此，第 1 行第 3 列交点的 $r_{13}=1$ 表示$\langle x_1,y_3\rangle\in R$，而第 3 行第 1 列

$$\Leftrightarrow (\exists B)(B \in A \wedge y \in R[B])$$
$$\Leftrightarrow (\exists B)(y \in R[B] \wedge R[B] \in \{R[B] \mid B \in A\})$$
$$\Leftrightarrow y \in \bigcup \{R[B] \mid B \in A\}$$

所以，$R[\bigcup A]=\bigcup\{R[B]\mid B\in A\}$.

(3) 对任意的 y，可得

$$y \in R[A \cap B] \Leftrightarrow (\exists x)(x \in A \cap B \wedge \langle x,y\rangle \in R)$$
$$\Leftrightarrow (\exists x)(x \in A \wedge x \in B \wedge \langle x,y\rangle \in R)$$
$$\Rightarrow (\exists x)(x \in A \wedge \langle x,y\rangle \in R) \wedge (\exists x)(x \in B \wedge \langle x,y\rangle \in R)$$
$$\Leftrightarrow y \in R[A] \wedge y \in R[B]$$
$$\Leftrightarrow y \in R[A] \cap R[B]$$

所以，$R[A\cap B]\subseteq R[A]\cap R[B]$.

定理中有三个结论是包含关系. 下面举出真包含的例子.

例 4 设整数集合 $\mathbf{Z}$ 上的关系 R 为

$R=\{\langle x,y\rangle \mid x\in\mathbf{Z}\wedge y\in\mathbf{Z}\wedge y=x^2\}$，集合 $A=\{1,2\}$，$B=\{0,-1,-2\}$.

于是，$R[A]=\{1,4\}$，$R[B]=\{0,1,4\}$. $R[A]\cap R[B]=\{1,4\}$. 但是，$A\cap B$ 是 $\varnothing$，$R[A\cap B]=\varnothing$.

此外，$A-B=\{1,2\}$，$R[A-B]=\{1,4\}$. 但是 $R[A]-R[B]=\varnothing$.

10.4 关系的性质

在实际问题中，我们感兴趣的往往不是一般的关系，而是具有某些特殊性质的关系. 为了更好地处理这些关系，有必要深入研究关系的性质. 对 A 上的关系来说，主要的性质有：自反性、非自反性、对称性、反对称性、传递性. 这一节定义这些性质，并给出若干结论.

10.4.1 定义

定义 10.4.1 对 A 上的关系 R，若对任意的 $x\in A$ 都有 xRx，则称 R 为 A 上自反的关系；若对任意的 $x\in A$ 都有 $x\not R x$，则称 R 为 A 上非自反的关系.

这个定义也可以写成：

R 是 A 上自反的 $\Leftrightarrow (\forall x)(x\in A\rightarrow xRx)$，

R 是 A 上非自反的 $\Leftrightarrow (\forall x)(x\in A\rightarrow x\not R x)$.

例 1 在非空集合 A 上的恒等关系 I_A 和全关系 E_A 都是自反的.

在集合 $B=\{x\mid x\in\mathbf{N}\wedge x\neq 0\}$ 上的整除关系 D_B 和小于等于关系 L_B 都是自反的.

在集合 A 的幂集 $P(A)$ 上的包含关系 $\subseteq$ 和相等关系 $=$ 都是自反的.

这些关系都不是非自反的.

例 2 在非空集合 A 上的空关系 $\varnothing$ 是非自反的. 在集合 $\mathbf{N}$ 上的小于关系 $<$ 是非自反的. 在集合 A 的幂集 $P(A)$ 上的真包含关系 $\subsetneq$ 是非自反的.

这些关系都不是自反的.

例 3 在集合 $A=\{1,2,3\}$ 上的关系

$$R = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,1\rangle\}$$

不是自反的，也不是非自反的. 但是在非空集合 A 上，不存在一个关系，它是自反的又是非自反的.

如果 R 是 A 上自反的，则关系矩阵 $\boldsymbol{M}(R)$ 的主对角线元素都是 1（即 r_{ii} 都是 1），关系图 $G(R)$ 的每个顶点都有自圈. 如果 R 是 A 上非自反的，则 $\boldsymbol{M}(R)$ 的主对角线元素都是 0，$G(R)$ 的每个顶点都没有自圈.

定义 10.4.2 R 为 A 上的关系，对任意的 $x, y \in A$，若 $xRy \to yRx$，则称 R 为 A 上对称的关系；若 $(xRy \wedge yRx) \to (x=y)$，则称 R 为 A 上反对称的关系.

这个定义也可以写成

R 是 A 上对称的 $\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)$

$$((x \in A \wedge y \in A \wedge xRy) \to yRx)$$

R 是 A 上反对称的 $\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)$

$$((x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \wedge yRx) \to x = y)$$

反对称性还有另一种等价的定义

R 是 A 上反对称的 $\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)$

$$((x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \wedge x \neq y) \to y\not{R}x).$$

例 4 在非空集合 A 上的全关系是对称的，不是反对称的.

例 5 在 $B=\{x \mid x \in \mathbf{N} \wedge x \neq 0\}$ 上的整除关系、小于等于关系、小于关系都是反对称的，且不是对称的.

例 6 在非空集合 A 上的恒等关系和空关系都是对称的，也都是反对称的.

例 7 在集合 $A=\{1,2,3\}$ 上的关系

$$R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 1,3\rangle\}$$

不是对称的，也不是反对称的.

例 6 和例 7 说明，对称性和反对称性既可以同时满足，也可以都不满足.

如果 R 是 A 上对称的，则 $\boldsymbol{M}(R)$ 是对称矩阵（对任意的 i 和 j，$r_{ij}=r_{ji}$），$G(R)$ 中任意两个顶点之间或者没有有向边，或者互有有向边 e_{ij} 和 e_{ji}（不会只有 e_{ij} 没有 e_{ji}）. 如果 R 是 A 上反对称的，则 $\boldsymbol{M}(R)$ 是反对称矩阵（对任意的 $i \neq j$，若 $r_{ij}=1$ 则 $r_{ji}=0$），$G(R)$ 中任意两个顶点之间或者没有有向边，或者仅有一条有向边（不会同时有 e_{ij} 和 e_{ji}）.

定义 10.4.3 R 为 A 上的关系，对任意的 $x, y, z \in A$，若 $(xRy \wedge yRz) \to xRz$，则称 R 为 A 上传递的关系.

这个定义也可以写成

R 是 A 上传递的 $\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(\forall z)$

$$((x \in A \wedge y \in A \wedge z \in A \wedge xRy \wedge yRz) \to xRz).$$

例 8 在集合 A 上的全关系、恒等关系、空关系都是传递的.

在 $B=\{x \mid x \in \mathbf{N} \wedge x \neq 0\}$ 上的整除关系、小于等于关系、小于关系都是传递的.

例 9 在集合 $A=\{1,2,3\}$ 上的关系

$$R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle\}$$

不是传递的关系，因为 $\langle 1,2\rangle \in R$，$\langle 2,3\rangle \in R$，但是 $\langle 1,3\rangle \notin R$.

10.4.2 几个结论

下列结论可以判断一些关系具有某种性质.

定理 10.4.1 R_1,R_2 是 A 上自反的关系,则 $R_1^{-1},R_1\cap R_2,R_1\cup R_2$ 也是 A 上自反的关系.

证明 对任意的 x,有

$$\begin{aligned}x\in A&\Rightarrow\langle x,x\rangle\in R_1\wedge\langle x,x\rangle\in R_2\\&\Leftrightarrow\langle x,x\rangle\in R_1\cap R_2\end{aligned}$$

所以,$R_1\cap R_2$ 是 A 上自反的关系.

对 R_1^{-1} 和 $R_1\cup R_2$ 的证明类似.

定理 10.4.2 R_1、R_2 是 A 上对称的关系,则 R_1^{-1}、$R_1\cap R_2$、$R_1\cup R_2$ 也是 A 上对称的关系.

证明 对任意的 $\langle x,y\rangle$,有

$$\begin{aligned}&\langle x,y\rangle\in R_1\cup R_2\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in R_1\vee\langle x,y\rangle\in R_2\\&\Leftrightarrow\langle y,x\rangle\in R_1\vee\langle y,x\rangle\in R_2\Leftrightarrow\langle y,x\rangle\in R_1\cup R_2\end{aligned}$$

所以,$R_1\cup R_2$ 是 A 上对称的关系.

对 R_1^{-1} 和 $R_1\cap R_2$ 的证明类似.

定理 10.4.3 R_1,R_2 是 A 上传递的关系,则 $R_1^{-1},R_1\cap R_2$ 是 A 上传递的关系.

证明 对任意的 $\langle x,y\rangle,\langle y,z\rangle$,有

$$\begin{aligned}&\langle x,y\rangle\in R_1^{-1}\wedge\langle y,z\rangle\in R_1^{-1}\\&\Leftrightarrow\langle y,x\rangle\in R_1\wedge\langle z,y\rangle\in R_1\\&\Rightarrow\langle z,x\rangle\in R_1\Leftrightarrow\langle x,z\rangle\in R_1^{-1}\end{aligned}$$

所以,R_1^{-1} 是 A 上传递的关系.

$$\begin{aligned}&\langle x,y\rangle\in R_1\cap R_2\wedge\langle y,z\rangle\in R_1\cap R_2\\&\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in R_1\wedge\langle x,y\rangle\in R_2\wedge\langle y,z\rangle\in R_1\wedge\langle y,z\rangle\in R_2\\&\Rightarrow\langle x,z\rangle\in R_1\wedge\langle x,z\rangle\in R_2\\&\Leftrightarrow\langle x,z\rangle\in R_1\cap R_2\end{aligned}$$

所以,$R_1\cap R_2$ 是 A 上传递的关系.

注意,$R_1\cup R_2$ 不一定是传递的.

例 10 在 $A=\{1,2,3\}$ 上的关系 $R_1=\{\langle 1,2\rangle\},R_2=\{\langle 2,3\rangle\}$ 都是 A 上传递的关系.但是,$R_1\cup R_2=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle\}$ 不是 A 上传递的.

定理 10.4.4 R_1,R_2 是 A 上反对称的关系,则 $R_1^{-1},R_1\cap R_2$ 是 A 上反对称的关系.

证明 为了证明方便,把反对称性的充要条件等价地改写为

$$(\forall x)(\forall y)(x\neq y\rightarrow(\langle x,y\rangle\notin R\vee\langle y,x\rangle\notin R))$$

对任意的 $x,y\in A$,有

$$\begin{aligned}&x\neq y\rightarrow(\langle x,y\rangle\notin R_1\vee\langle y,x\rangle\notin R_1)\\&\Leftrightarrow x\neq y\rightarrow(\langle y,x\rangle\notin R_1^{-1}\vee\langle x,y\rangle\notin R_1^{-1})\end{aligned}$$

所以，R_1^{-1} 是 A 上反对称的.

$$(x \neq y \rightarrow (\langle x,y\rangle \notin R_1 \vee \langle y,x\rangle \notin R_1)) \wedge (x \neq y \rightarrow (\langle x,y\rangle \notin R_2 \vee \langle y,x\rangle \notin R_2))$$
$$\Leftrightarrow x \neq y \rightarrow ((\langle x,y\rangle \notin R_1 \vee \langle y,x\rangle \notin R_1) \wedge (\langle x,y\rangle \notin R_2 \vee \langle y,x\rangle \notin R_2))$$
$$\Rightarrow x \neq y \rightarrow (\langle x,y\rangle \notin R_1 \vee \langle y,x\rangle \notin R_1 \vee \langle x,y\rangle \notin R_2 \vee \langle y,x\rangle \notin R_2)$$
$$\Leftrightarrow x \neq y \rightarrow (\neg(\langle x,y\rangle \in R_1 \wedge \langle x,y\rangle \in R_2) \vee \neg(\langle y,x\rangle \in R_1 \wedge \langle y,x\rangle \in R_2))$$
$$\Leftrightarrow x \neq y \rightarrow (\langle x,y\rangle \notin R_1 \cap R_2 \vee \langle y,x\rangle \notin R_1 \cap R_2)$$

所以，$R_1 \cap R_2$ 是 A 上反对称的.

注意，这时 $R_1 \cup R_2$ 不一定是反对称的.

例 11 在 $A=\{1,2,3\}$上的关系 $R_1=\{\langle 1,2\rangle\}$，$R_2=\{\langle 2,1\rangle\}$都是 A 上反对称的. 但是，$R_1 \cup R_2=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\}$不是 A 上反对称的.

定理 10.4.5 对 A 上的关系 R，则

(1) R 是对称的$\Leftrightarrow R=R^{-1}$，可得

(2) R 是反对称的$\Leftrightarrow R \cap R^{-1} \subseteq I_A$.

证明

(1) 先设 R 是对称的，对任意的$\langle x,y\rangle$，可得

$$\langle x,y\rangle \in R \Leftrightarrow \langle y,x\rangle \in R \Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in R^{-1},$$

所以，$R=R^{-1}$.

再设 $R=R^{-1}$，对任意的$\langle x,y\rangle$，可得

$$\langle x,y\rangle \in R \Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in R^{-1} \Leftrightarrow \langle y,x\rangle \in R$$

所以，R 是对称的.

(2) 先设 R 是反对称的，对任意的$\langle x,y\rangle$，可得

$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle \in R \cap R^{-1} &\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in R \wedge \langle x,y\rangle \in R^{-1}\\ &\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in R \wedge \langle y,x\rangle \in R\\ &\Rightarrow x = y \Rightarrow \langle x,y\rangle \in I_A\end{aligned}$$

所以，$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$.

再设 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$，对任意的$\langle x,y\rangle$，可得

$$\begin{aligned}&\langle x,y\rangle \in R \wedge \langle y,x\rangle \in R\\ &\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in R \wedge \langle x,y\rangle \in R^{-1}\\ &\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in R \cap R^{-1}\\ &\Rightarrow \langle x,y\rangle \in I_A \Rightarrow x = y\end{aligned}$$

所以，R 是反对称的.

10.6 等价关系和划分

在实数之间的相等关系、在集合之间的相等关系、在谓词公式之间的等值关系具有类似的性质. 它们都具有自反性、对称性和传递性. 下面把具有这三种性质的关系称为等价关系. 这是一类很重要的关系，可以用集合上的等价关系把该集合划分成等价类.

10.6.1 等价关系

定义 10.6.1 对非空集合 A 上的关系 R，如果 R 是自反的、对称的和传递的，则称 R 为 A 上的等价关系.

例 1 在非空集合 A 上的恒等关系 I_A 和全关系 E_A 都是等价关系. 在所有谓词公式的集合上的等值关系⇔也是等价关系.

例 2 集合 $A=\{1,2,\cdots,8\}$ 上的关系

$$R=\{\langle x,y\rangle \mid x\equiv y(\mathrm{mod}3)\}.$$

其中 $x\equiv y(\mathrm{mod}3)$ 表示 $x-y$ 可被 3 整除.

对任意的 $x,y,z\in A$, $x-x$ 可被 3 整除. 若 $x-y$ 可被 3 整除, 则 $y-x$ 也可被 3 整除. 若 $x-y$ 和 $y-z$ 可被 3 整除, 则 $x-z=(x-y)+(y-z)$ 可被 3 整除. 所以, R 具有自反性、对称性和传递性, R 是 A 上的等价关系.

R 的关系图如图 10.6.1 所示. 在图中, A 的元素被分成三组, 每组中任两个元素之间都有关系, 而不同组的元素之间都没有关系. 这样的组称为等价类.

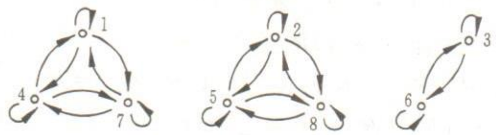

图 10.6.1

第 9 章给出了用平面坐标系中的矩形表示笛卡儿积 $A\times B$ 的图形表示法. 显然可以用正方形表示 $A\times A$, 如图 10.6.2(a)所示. A 上的关系是 $A\times A$ 的子集, 因此可以用正方形的子集表示. A 上的等价关系可以用正方形的一条对角线和线上的若干正方形表示. 如图 10.6.2(b)所示. 但是图 10.6.2(c)所表示的关系不是等价关系. 它包括了对角线, 所以有自反性. 它以对角线为对称轴, 所以有对称性. 但它没有传递性. 因为 R 中的 a 和 b 点对应的有序对, 经传递得到 c 点对应的有序对应在 R 中, 但 c 点不在 R 中.

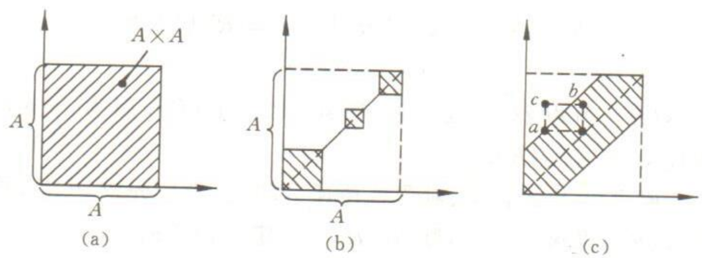

图 10.6.2

定义 10.6.2 R 是非空集合 A 上的等价关系, 对任意的 $x\in A$, 令

$$[x]_R=\{y\mid y\in A\wedge xRy\},$$

则称集合 $[x]_R$ 为 x 关于 R 的等价类, 简称 x 的等价类, 也可记作 $[x]$ 或 $\bar{x}$.

例 3 对例 2 的等价关系 R, 有三个不同的等价类:

$[1]_R=\{1,4,7\}=[4]_R=[7]_R$,

$[2]_R=\{2,5,8\}=[5]_R=[8]_R$,

$[3]_R=\{3,6\}=[6]_R$.

A 的 8 个元素各有一个等价类. 各等价类之间, 或者相等, 或者不相交. 而且所有等价类的并集就是 A.

定理 10.6.1 R是非空集合A上的等价关系，对任意的$x,y\in A$，成立

(1) $[x]_R\neq\varnothing$ 且$[x]_R\subseteq A$，

(2) 若xRy， 则$[x]_R=[y]_R$，

(3) 若$x\not R y$， 则$[x]_R\cap[y]_R=\varnothing$，

(4) $\bigcup\{[x]_R\mid x\in A\}=A$.

证明

(1) 对任意的$x\in A$，xRx，则$x\in[x]_R$，因此$[x]_R\neq\varnothing$. 由等价类定义，显然$[x]_R\subseteq A$.

(2) 对任意的$x_0\in[x]_R$，有xRx_0. 由对称性，有x_0Rx. 由xRy和传递性，有x_0Ry，yRx_0，所以$x_0\in[y]_R$. 类似可证$x_0\in[y]_R\to x_0\in[x]_R$. 因此，$[x]_R=[y]_R$.

(3) 假设$[x]_R\cap[y]_R\neq\varnothing$. 则存在$x_0$，使得$x_0\in[x]_R$且$x_0\in[y]_R$. 即$xRx_0$且$yRx_0$，由对称性$x_0Ry$，由传递性$xRy$. 与已知矛盾.

(4) 对任意的$x\in A$，$[x]_R\subseteq A$. 则有$\bigcup\{[x]_R\mid x\in A\}\subseteq A$. 反之，对任意的$x\in A$，$x\in[x]_R$. 则有$x\in\bigcup\{[x]_R\mid x\in A\}$. 所以，$A\subseteq\bigcup\{[x]_R\mid x\in A\}$. 因此$\bigcup\{[x]_R\mid x\in A\}=A$.

由定理可知，对A上的等价关系R，所有等价类的集合具有很好的性质.

定义 10.6.3 对非空集合A上的关系R，以R的不相交的等价类为元素的集合称为A的商集，记作A/R.

这个定义也可以写成

$$A/R=\{y\mid(\exists x)(x\in A\wedge y=[x]_R)\}.$$

例 4 对例 2 中的A和R，商集是

$$\begin{aligned}A/R&=\{[1]_R,\ [2]_R,\ [3]_R\}\\&=\{\{1,4,7\},\{2,5,8\},\{3,6\}\}.\end{aligned}$$

10.6.2 划分

定义 10.6.4 对非空集合A，若存在集合π满足下列条件：

(1) $(\forall x)(x\in\pi\to x\subseteq A)$，

(2) $\varnothing\notin\pi$，

(3) $\bigcup\pi=A$，

(4) $(\forall x)(\forall y)((x\in\pi\wedge y\in\pi\wedge x\neq y)\to x\cap y=\varnothing)$，则称$\pi$为$A$的一个划分，称$\pi$中的元素为$A$的划分块.

A的一个划分π，是A的非空子集的集合(即$\pi\subseteq P(A)$且$\varnothing\notin\pi$)，A的这些子集互不相交，且它们的并集为A.

例 5 对集合$A=\{a,b,c,d\}$. 则

$$\pi_1=\{\{a\},\{b,c\},\{d\}\}$$

和

$$\pi_2=\{\{a,b,c,d\}\}$$

都是A的划分. $\{a\}$，$\{b,c\}$，$\{d\}$为π_1的划分块. 但是

$$\pi_3=\{\{a,b\},\{c\},\{a,d\}\}$$

和

$$\pi_4=\{\{a,b,d\}\}$$

都不是A的划分.

定理 10.6.2 对非空集合 A 上的等价关系 R，A 的商集 A/R 就是 A 的划分，它称为由价关系 R 诱导出来的 A 的划分，记作 π_R.

证明可以由定义 10.6.3、定义 10.6.4 和定理 10.6.1 直接得到.

上面说明，由 A 上的等价关系 R 可以诱导出 A 的一个划分. 下面考虑，由 A 的一个划如何诱导出 A 上的一个等价关系.

定理 10.6.3 对非空集合 A 的一个划分 π，令 A 上的关系 R_π 为

$$R_\pi=\{\langle x,y\rangle \mid (\exists z)(z\in\pi \wedge x\in z \wedge y\in z)\}$$

R_π 为 A 上的等价关系，它称为划分 π 诱导出的 A 上的等价关系.

证明留作思考题.

定理 10.6.4 对非空集合 A 的一个划分 π 和 A 上的等价关系 R，π 诱导 R 当且仅当 R 导 π.

证明 先证必要性. 若 π 诱导 R，且 R 诱导 π'. 对任意的 $x\in A$，设 x 在 π 的划分块 B，也在 π' 的划分块 B' 中. 对任意的 $y\in A$，有

$$\begin{aligned}
& y\in B \Leftrightarrow xRy && (x\in B \text{ 且 } \pi \text{ 诱导 } R)\\
& \Leftrightarrow [x]_R=[y]_R && (R \text{ 为等价关系})\\
& \Leftrightarrow y\in B' && (x\in B' \text{ 且 } R \text{ 诱导 } \pi')
\end{aligned}$$

以，$B=B'$. 由 x 的任意性，$\pi=\pi'$.

再证充分性. 若 R 诱导 π，且 π 诱导 R'. 对任意的 $x,y\in A$，可得

$$\begin{aligned}
& xRy \Leftrightarrow [x]_R=[y]_R \Leftrightarrow x\in[x]_R \wedge y\in[x]_R\\
& \Leftrightarrow x \text{ 和 } y \text{ 在 } \pi \text{ 的同一划分块中}\\
& \Leftrightarrow xR'y
\end{aligned}$$

以，$R=R'$.

由定理可知，集合 A 的划分和 A 上的等价关系可以建立一一对应.

例 6 在集合 $A=\{1,2,3\}$ 上求出尽可能多的等价关系.

先求 A 的所有划分，如图 10.6.3 所示.

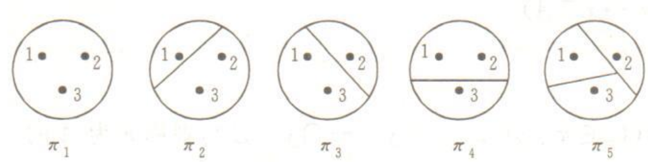

图 10.6.3

于是可得到 5 个等价关系.

$R_1=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$,

$R_2=\{\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$,

$R_3=\{\langle 1,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$,

$R_4=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$,

$R_5=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$.

10.7 相容关系和覆盖

10.7.1 相容关系

定义 10.7.1 对非空集合 A 上的关系 R,如果 R 是自反的、对称的,则称 R 为 A 上的相容关系.

例 1 A 是英文单词的集合

$$A=\{\text{cat}, \text{teacher}, \text{cold}, \text{desk}, \text{knife}, \text{by}\},$$

A 上的关系 R 为

$$R=\{\langle x,y\rangle \mid x \text{ 和 } y \text{ 至少有一相同字母}\}.$$

显然,R 是自反的、对称的,但不是传递的. 因此,R 是相容关系.

相容关系的关系图中,每个顶点都有自圈,而且若一对顶点间有边则有向边成对出现. 因此可以简化关系图,可以不画自圈,并用无向边代替一对来回的有向边. 对例 1 的 R,设

$$x_1=\text{cat}, x_2=\text{teacher}, x_3=\text{cold},$$
$$x_4=\text{desk}, x_5=\text{knife}, x_6=\text{by},$$

则关系图可以简化为图 10.7.1.

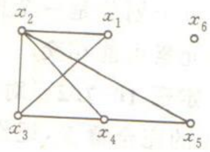

图 10.7.1

定义 10.7.2 对非空集合 A 上的相容关系 R,若 $C\subseteq A$,且 C 中任意两个元素 x 和 y 有 xRy,则称 C 是由相容关系 R 产生的相容类,简称相容类.

这个定义也可以写成

$$C=\{x \mid x\in A \wedge (\forall y)(y\in C\rightarrow xRy)\}.$$

例 2 对例 1 中的相容关系 R,相容类有 $\{x_1, x_2\}$, $\{x_3, x_4\}$, $\{x_6\}$, $\{x_2, x_4, x_5\}$ 等. 前两个相容类都可以加入其他元素,构成更大的相容类. 如 $\{x_1, x_2\}$ 加入 x_3 得到另一相容类 $\{x_1, x_2, x_3\}$. 后两个相容类再加入任何新元素都不是相容类了,这两个相容类称为最大相容类.

定义 10.7.3 对非空集合 A 上的相容关系 R,一个相容类若不是任何相容类的真子集,就称为最大相容类,记作 C_R.

对最大相容类 C_R 有下列性质:

$$(\forall x)(\forall y)((x\in C_R \wedge y\in C_R)\rightarrow xRy)$$

和

$$(\forall x)(x\in A-C_R\rightarrow (\exists y)(y\in C_R \wedge x\not R y)).$$

在相容关系的简化图中,最大完全多边形是每个顶点与其他所有顶点相连的多边形. 这种最大完全多边形的顶点集合,才是最大相容类. 此外,一个孤立点的集合也是最大相容类;如果两点连线不是最大完全多边形的边,这两个顶点的集合也是最大相容类.

例 3 对例 1 中的相容关系 R,最大相容类有 $\{x_1,x_2,x_3\}$, $\{x_2,x_3,x_4\}$, $\{x_2,x_4,x_5\}$ 和 $\{x_6\}$.

定理 10.7.1 对非空有限集合 A 上的相容关系 R,若 C 是一个相容类,则存在一个最大相容类 C_R,使 $C\subseteq C_R$.

证明 设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$. 构造相容类的序列

$$C_0\subset C_1\subset C_2\subset\cdots$$

使 $C_0=C, C_{i+1}=C_i \cup \{a_j\}$，而 j 是满足 $a_j \notin C_i$ 且 a_j 与 C_j 中各元素有关系 R 的最小下标.

因为 $|A|=n$，所以至多经过 $n-|C|$ 步，过程就结束，而且序列中最后一个相容类是 C_R. 结论得证.

对任意的 $a \in A$，有相容类 $\{a\}$. 它必定包含在某个 C_R 中. 所以，C_R 的集合覆盖住 A.

10.8 偏序关系

在实数之间的小于等于关系，在集合之间的包含关系具有类似的性质. 它们都具有自反性、反对称性和传递性. 下面把具有这三种性质的关系称为偏序关系. 它和等价关系同为很重要的关系.

10.8.1 偏序关系和拟序关系

定义 10.8.1 对非空集合 A 上的关系 R，如果 R 是自反的、反对称的和传递的，则称 R

为 A 上的偏序关系.

在不会产生误解时,偏序关系 R 通常记作 $\leqslant$. 当 xRy 时,可记作 $x\leqslant y$,读作 x"小于等于"y.

例 1 在集合 $\mathbf{N}-\{0\}$ 上的小于等于关系和整除关系,都是偏序关系. 对集合 A,在 $P(A)$ 上的包含关系也是偏序关系.

定义 10.8.2 对非空集合 A 上的关系 R,如果 R 是非自反的和传递的,则称 R 为 A 上的拟序关系.

在不会产生误解时,拟序关系 R 通常记作 $<$. 当 xRy 时,可记作 $x<y$,读作 x"小于"y.

例 2 在集合 $\mathbf{N}$ 上的小于关系是拟序关系. 对集合 A,在 $P(A)$ 上的真包含关系也是拟序关系.

偏序关系又称弱偏序关系,或半序关系. 拟序关系又称强偏序关系.

定理 10.8.1 R 为 A 上的拟序关系,则 R 是反对称的.

证明 假设 R 不是反对称的. 则存在 $x\in A, y\in A, x\neq y$,使 $\langle x,y\rangle\in R$ 且 $\langle y,x\rangle\in R$. 由传递性,$\langle x,x\rangle\in R$. 与非自反性矛盾.

有的书上把反对称性也作为拟序关系定义的一个条件. 定理表明,这是不必要的.

定理 10.8.2 对 A 上的拟序关系 R, $R\cup R^0$ 是 A 上的偏序关系.

证明从略.

定理 10.8.3 对 A 上的偏序关系 R, $R-R^0$ 是 A 上的拟序关系.

证明从略.

拟序关系和偏序关系的区别只是自反性. 由于它们类似,只要把偏序关系搞清,拟序关系也容易搞清. 以下只讨论偏序关系.

定义 10.8.3 集合 A 与 A 上的关系 R 一起称为一个结构. 集合 A 与 A 上的偏序关系 R 一起称为一个偏序结构,或称偏序集,并记作 $\langle A,R\rangle$.

例 3 $\langle\mathbf{N},\leqslant\rangle$ 和 $\langle P(A),\subseteq\rangle$ 都是偏序集.

第 11 章　函　　数

上一章研究了关系的自反、传递、对称等性质，并针对这些性质研究了一些特殊的关系，如等价关系、偏序关系. 这一章研究的各类函数是另外一些特殊的关系，这是从它们的单值性、定义域和值域的性质来讨论的. 函数是一个基本的数学概念. 通常的实函数是在实数集合上讨论的. 这里推广了实函数概念，讨论在任意集合上的函数.

11.1　函数和选择公理

11.1.1　函数定义

定义 11.1.1　对集合 A 到集合 B 的关系 f，若满足下列条件：

(1) 对任意的 $x \in \mathrm{dom}(f)$，存在唯一的 $y \in \mathrm{ran}(f)$，使 xfy 成立；

(2) $\mathrm{dom}(f) = A$

则称 f 为从 A 到 B 的函数，或称 f 把 A 映射到 B(有的书称 f 为全函数、映射、变换).

一个从 A 到 B 的函数 f，可以写成 $f: A \to B$. 这时若 xfy，则可记作 $f: x \mapsto y$ 或 $f(x) = y$.

若 A 到 B 的关系 f 只满足条件(1)，且有 $\mathrm{dom}(f) \subset A$，则称 f 为从 A 到 B 的部分函数(有的书上称 f 为函数).

函数的两个条件可以写成

(1) $(\forall x)(\forall y_1)(\forall y_2)((xfy_1 \land xfy_2) \to y_1 = y_2)$，

(2) $(\forall x)(x \in A \to (\exists y)(y \in B \land xfy))$.

函数的第一个条件是单值性，定义域中任一 x 与 B 中唯一的 y 有关系. 因此可以用 $f(x)$ 表示这唯一的 y. 第二个条件是 A 为定义域，A 中任一 x 都与 B 中某个 y 有关系. 注意不能把单值性倒过来. 对 A 到 B 的函数 f，当 x_1fy 且 x_2fy 成立时，不一定 $x_1 = x_2$. 因此，函数的逆关系不一定是函数.

如果一个关系是函数，则它的关系矩阵中每行恰好有一个 1，其余为 0，它的关系图中每个 A 中的顶点恰好发出一条有向边.

例 1　对实数集 $\mathbf{R}$，$\mathbf{R}$ 上的关系 f 为

$$f = \{\langle x, y\rangle \mid y = x^3\}$$

f 是从 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的函数，记作 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$，并记作 $f: x \mapsto x^3$ 或 $f(x) = x^3$.

例 2　集合 $A = \{1, 2, 3\}$ 上的两个关系

$$g = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 3,2\rangle\}$$

和

$$h = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle\}$$

都不是从 A 到 A 的函数.

因为 g 没有单值性，即 $\langle 3,1\rangle \in g$ 且有 $\langle 3,2\rangle \in g$，而对关系 h，$\mathrm{dom}(h)=\{1,2\}\neq A$. 但是，$h$ 是从 $\{1,2\}$ 到 A 的函数.

定义 11.1.2 对集合 A 和 B，从 A 到 B 的所有函数的集合记为 A_B（有的书记为 B^A）. 于是，$A_B=\{f \mid f: A\to B\}$.

例 3 对 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{a,b\}$. 从 A 到 B 的函数有 8 个：

$$f_1 = \{\langle 1,a\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 3,a\rangle\}$$
$$f_2 = \{\langle 1,a\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 3,b\rangle\}$$
$$f_3 = \{\langle 1,a\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 3,a\rangle\}$$
$$f_4 = \{\langle 1,a\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 3,b\rangle\}$$
$$f_5 = \{\langle 1,b\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 3,a\rangle\}$$
$$f_6 = \{\langle 1,b\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 3,b\rangle\}$$
$$f_7 = \{\langle 1,b\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 3,a\rangle\}$$
$$f_8 = \{\langle 1,b\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 3,b\rangle\}$$

于是
$$A_B=\{f_1,f_2,f_3,\cdots,f_8\}$$

若 A 和 B 是有限集合，且 $|A|=m$，$|B|=n$，则 $|A_B|=n^m$. 从 $\varnothing$ 到 $\varnothing$ 的函数只有 $f=\varnothing$，从 $\varnothing$ 到 B 的函数只有 $f=\varnothing$. 若 $A\neq\varnothing$，从 A 到 $\varnothing$ 的函数不存在. 因此，$\varnothing_\varnothing=\varnothing_B=\{\varnothing\}$，$A_\varnothing=\varnothing$（对 $A\neq\varnothing$）.

定义 11.1.3 设 $f: A\to B$，$A_1\subseteq A$，定义 A_1 在 f 下的象 $f[A_1]$ 为
$$f[A_1] = \{y \mid (\exists\, x)(x \in A_1 \wedge y = f(x))\}.$$
把 $f[A]$ 称为函数的象.

设 $B_1\subseteq B$，定义 B_1 在 f 下的完全原象 $f^{-1}[B_1]$ 为
$$f^{-1}[B_1] = \{x \mid x \in A \wedge f(x) \in B_1\}$$

注意，在上一章 f^{-1} 表示 f 的逆关系. 这个定义中的 $f^{-1}[B_1]$ 表示完全原象，可以认为其中的 f^{-1} 是 f 的逆关系. 因为函数的逆关系不一定是函数，所以 f^{-1} 一般只表示逆关系，不是逆函数（除非特别说明）.

例 4 $f: \mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$ 定义为
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & \text{当 } x \text{ 为偶数}\\[2mm] \dfrac{x-1}{2}, & \text{当 } x \text{ 为奇数}\end{cases}$$

则
$$f[\mathbf{N}] = \mathbf{N}, f[\{-1,0,1\}] = \{-1,0\},$$
$$f^{-1}[\{2,3\}] = \{4,5,6,7\}.$$

特别地
$$f[\varnothing] = f^{-1}[\varnothing] = \varnothing.$$

11.1.2 特殊的函数

等价关系和函数都是特殊的关系. 同样可以定义一些特殊的函数，它们是具有某种性质的函数.

定义 11.1.4 设 $f: A\to B$.

(1) 若 $\mathrm{ran}(f)=B$，则称 f 是满射的，或称 f 是 A 到 B 上的；

(2) 若对任意的 $x_1,x_2\in A, x_1\neq x_2$，都有

$f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 f 是单射的，或内射的，或一对一的；

(3) 若 f 是满射的又是单射的，则称 f 是双射的，或一对一 A 到 B 上的. 简称双射.

如果 $f:A\to B$ 是满射的，则对任意的 $y\in B$，存在 $x\in A$，使 $f(x)=y$. 如果 $f:A\to B$ 是单射的，则对任意的 $y\in \mathrm{ran}(f)$，存在唯一的 $x\in A$，使 $f(x)=y$.

例 5 $f:\{1,2\}\to\{0\}, f(1)=f(2)=0$，是满射的，不是单射的. $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}, f(x)=2x$，是单射的，不是满射的. $f:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}, f(x)=x+1$，是双射的.

特别地，$\varnothing:\varnothing\to B$ 是单射的，$\varnothing:\varnothing\to\varnothing$ 是双射的.

给定两个集合 A 和 B，是否存在从 A 到 B 的双射函数？怎样构造从 A 到 B 的双射函数？这是两个很重要的问题. 第一个问题在下一章讨论. 下面举例说明第二个问题.

例 6 对下列的集合 A 和 B，分别构造从 A 到 B 的双射函数：

(1) $A=\mathbf{R}, B=\mathbf{R}$，$\mathbf{R}$ 是实数集.

(2) $A=\mathbf{R}, B=\mathbf{R}_+=\{x\mid x\in\mathbf{R}\wedge x>0\}$.

(3) $A=[0,1), B=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$都是实数区间.

(4) $A=\mathbf{N}\times\mathbf{N}, B=\mathbf{N}$.

解

(1) 令 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x$.

(2) 令 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}_+, f(x)=\mathrm{e}^x$.

(3) 令 $f:[0,1)\to\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right], f(x)=\frac{1}{2}-\frac{x}{4}$.

(4) $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 是由自然数构成的所有有序对的集合. 这些有序对可以排列在直角坐标系一个象限中，构成一个无限的点阵. 如图 11.1.1 所示. 构造要求的双射函数，就是在点阵中有序对与 $\mathbf{N}$ 的元素间建立一一对应，也就是把点阵中有序对排成一列并依次编号 0,1,2,….

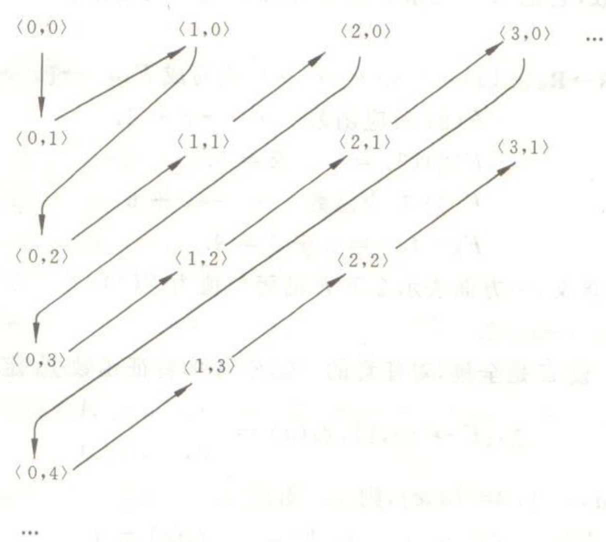

图 11.1.1

$\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 中元素的排列次序是：$\langle 0,0\rangle,\langle 0,1\rangle,\langle 1,0\rangle,\langle 0,2\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 2,0\rangle,\langle 0,3\rangle,\cdots$. 图中用箭头表示次序. 这相当于 $f(\langle 0,0\rangle)=0, f(\langle 0,1\rangle)=1, f(\langle 1,0\rangle)=2, f(\langle 0,2\rangle)=3,\cdots$.

显然，$\langle m,n\rangle$ 所在的斜线上有 $m+n+1$ 个点. 在此斜线上方，各行元素分别有 $1,2,\cdots,m+n$ 个，这些元素排在 $\langle m,n\rangle$ 以前. 在此斜线上，m 个元素排在 $\langle m,n\rangle$ 以前. 排在 $\langle m,n\rangle$ 以前的元素共有 $[1+2+\cdots+(m+n)]+m$ 个. 于是，双射函数 $f:\mathbf{N}\times\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ 为

$$f(\langle m,n\rangle)=\frac{(m+n)(m+n+1)}{2}+m.$$

对无限集合 A，若存在从 A 到 $\mathbf{N}$ 的双射函数，就可仿照这种方法，把 A 中元素排成一个有序图形，按次序数遍 A 中元素. 这就构造了从 A 到 $\mathbf{N}$ 的双射函数.

11.2 函数的合成与函数的逆

函数是特殊的关系，所以关于关系合成与关系的逆的定理，都适用于函数. 下面讨论函数的一些特殊性质.

11.2.1 函数的合成

定理 11.2.1 设 $g:A\to B$，$f:B\to C$，则

(1) $f\circ g$ 是函数 $f\circ g:A\to C$，

(2) 对任意的 $x\in A$，有 $(f\circ g)(x)=f(g(x))$.

证明

(1) 因为 $g:A\to B$，则 $(\forall x)(x\in A\to(\exists y)(y\in B\land\langle x,y\rangle\in g))$. 又因 $f:B\to C$，则 $(\forall y)(y\in B\to(\exists z)(z\in C\land\langle y,z\rangle\in f))$. 由任意的 $x\in A$，存在 $y\in B$ 有 $\langle x,y\rangle\in g$，对 $y\in B$ 存在 $z\in C$ 有 $\langle y,z\rangle\in f$，因此对 $x\in A$ 存在 $z\in C$ 使 $\langle x,y\rangle\in g\land\langle y,z\rangle\in f$，使 $\langle x,z\rangle\in f\circ g$. 所以 $\mathrm{dom}(f\circ g)=A$.

假设对任意的 $x\in A$，存在 y_1 和 y_2，使得 $\langle x,y_1\rangle\in f\circ g$ 且 $\langle x,y_2\rangle\in f\circ g$. 则

$$(\exists t_1)(\exists t_2)((xgt_1\land t_1fy_1)\land(xgt_2\land t_2fy_2)).$$

因为 g 是函数，则 $t_1=t_2$；又因 f 是函数，则 $y_1=y_2$. 所以 $f\circ g$ 是函数.

(2) 对任意的 $x\in A$,因为 $\langle x,g(x)\rangle\in g$,$\langle g(x),f(g(x))\rangle\in f$,故 $\langle x,f(g(x))\rangle\in f\circ g$. 又因 $f\circ g$ 是函数,则可写为 $(f\circ g)(x)=f(g(x))$.

函数的合成可以用图 11.2.1 表示. 从图中可见 $\mathrm{dom}(g)=A$,$\mathrm{ran}(g)\subseteq B=\mathrm{dom}(f)$,$\mathrm{ran}(f)\subseteq C$. 而 $\mathrm{dom}(f\circ g)=A$,$\mathrm{ran}(f\circ g)\subseteq C$.

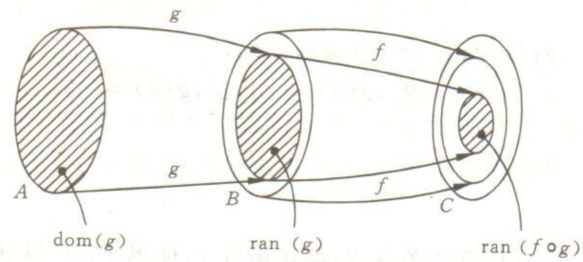

图 11.2.1

定理 11.2.2 设 $g:A\to B$,$f:B\to C$,则有

(1) 若 f,g 是满射的,则 $f\circ g$ 是满射的,

(2) 若 f,g 是单射的,则 $f\circ g$ 是单射的,

(3) 若 f,g 是双射的,则 $f\circ g$ 是双射的.

证明

(1) 对任意的 $z\in C$,因为 f 是满射的,故 $\exists y\in B$,使 $f(y)=z$. 对这个 $y\in B$,因为 g 是满射的,故 $\exists x\in A$,使 $g(x)=y$. 所以,$z=f(y)=f(g(x))=(f\circ g)(x)$. $f\circ g$ 是满射的.

(2) 对任意的 $z\in\mathrm{ran}(f\circ g)$,若存在 x_1,x_2,使 $(f\circ g)(x_1)=z$ 且 $(f\circ g)(x_2)=z$. 则存在 y_1,y_2,使 $x_1gy_1\wedge y_1fz$ 且 $x_2gy_2\wedge y_2fz$. 因为 f 是单射的,故 $y_1=y_2$;又因 g 是单射的,故 $x_1=x_2$. 所以,$f\circ g$ 是单射的.

(3) 由(1)、(2) 得证.

这个定理的逆定理是否成立呢? 请看下列定理.

定理 11.2.3 设 $g:A\to B$,$f:B\to C$,则有

(1) 若 $f\circ g$ 是满射的,则 f 是满射的,

(2) 若 $f\circ g$ 是单射的,则 g 是单射的,

(3) 若 $f\circ g$ 是双射的,则 f 是满射的,g 是单射的.

证明

(1) 对任意的 $z\in C$,因为 $f\circ g$ 是满射的,故 $\exists x\in A$,使 $x(f\circ g)z$. 则 $\exists y\in B$,使 $xgy\wedge yfz$. 则 $\exists y\in B$,使 $f(y)=z$. f 是满射的.

(2) 对任意的 $y\in\mathrm{ran}(g)$,若存在 $x_1,x_2\in A$,使 $x_1gy\wedge x_2gy$,即 $g(x_1)=y=g(x_2)$. 对这个 $y\in B$,(因 $\mathrm{ran}(g)\subseteq B$),存在 $z\in C$,使得 $f(y)=z$. 则 $f(g(x_1))=z=f(g(x_2))$,于是 $x_1(f\circ g)z\wedge x_2(f\circ g)z$. 因为 $f\circ g$ 是单射的,故 $x_1=x_2$. 所以 g 是单射的.

(3) 由(1),(2) 得证.

注意,当 $f\circ g$ 是满射的,g 不一定是满射的;当 $f\circ g$ 是单射的,f 不一定是单射的.

例 1 设 $g:A\to B$,$f:B\to C$,$A=\{a\}$,$B=\{b,d\}$,$C=\{c\}$. 且 $g=\{\langle a,b\rangle\}$,$f=\{\langle b,c\rangle,\langle d,c\rangle\}$,则 $f\circ g=\{\langle a,c\rangle\}$. $f\circ g$ 是满射的,但是 g 不是满射的.

例 2 设 $g:A\to B,f:B\to C,A=\{a\},B=\{b,d\},C=\{c\}$，且 $g=\{\langle a,b\rangle\},f=\{\langle b,c\rangle,\langle d,c\rangle\}$，则 $f\circ g=\{\langle a,c\rangle\}$. $f\circ g$ 是单射的，但是 f 不是单射的.

定理 11.2.4 设 $f:A\to B$，则 $f=f\circ I_A=I_B\circ f$.

证明留作思考题.

11.2.2 函数的逆

一个关系的逆不一定是函数，一个函数的逆也不一定是函数.

例 3 对 $A=\{a,b,c\}$. A 上的关系 R 为

$$R=\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle a,a\rangle\},$$

从 A 到 A 的函数 f 为

$$f=\{\langle a,c\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,a\rangle\}.$$

则它们的逆为

$R^{-1}=\{\langle b,a\rangle,\langle c,a\rangle,\langle a,a\rangle\}$ 是 A 到 A 的函数，

$f^{-1}=\{\langle c,a\rangle,\langle c,b\rangle,\langle a,c\rangle\}$ 不是 A 到 A 的函数.

定理 11.2.5 若 $f:A\to B$ 是双射的，则 f^{-1} 是函数 $f^{-1}:B\to A$.

证明 对任意的 $y\in B$，因为 f 是双射的，所以存在 $x\in A$，使 $\langle x,y\rangle\in f$，$\langle y,x\rangle\in f^{-1}$. 所以，$\mathrm{dom}(f^{-1})=B$.

对任意的 $y\in B$，若存在 $x_1,x_2\in A$，使得 $\langle y,x_1\rangle\in f^{-1}$ 且 $\langle y,x_2\rangle\in f^{-1}$，则 $\langle x_1,y\rangle\in f$ 且 $\langle x_2,y\rangle\in f$. 因为 f 是双射的，故 $x_1=x_2$. 所以，f^{-1} 是函数 $f^{-1}:B\to A$.

定义 11.2.1 设 $f:A\to B$ 是双射的，则称 $f^{-1}:B\to A$ 为 f 的反函数.

定理 11.2.6 若 $f:A\to B$ 是双射的，则 $f^{-1}:B\to A$ 是双射的.

证明 对任意的 $x\in A$，因为 f 是从 A 到 B 的函数，故存在 $y\in B$，使 $\langle x,y\rangle\in f$，$\langle y,x\rangle\in f^{-1}$. 所以，$f^{-1}$ 是满射的.

对任意的 $x\in A$，若存在 $y_1,y_2\in B$，使得 $\langle y_1,x\rangle\in f^{-1}$ 且 $\langle y_2,x\rangle\in f^{-1}$，则有 $\langle x,y_1\rangle\in f$ 且 $\langle x,y_2\rangle\in f$. 因为 f 是函数，则 $y_1=y_2$. 所以，f^{-1} 是单射的. 它是双射的.

例 4 $f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$，$f(x)=\sin x$ 是双射函数. 所以，$f^{-1}:[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，$f^{-1}(y)=\arcsin y$ 是 f 的反函数.

对实数集合 $\mathbf{R}$，正实数集合 $\mathbf{R}_+$. $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}_+$，$g(x)=2^x$ 是双射的. 所以，$g^{-1}:\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}$，$g^{-1}(y)=\log_2 y$ 是 g 的反函数.

定理 11.2.7 若 $f:A\to B$ 是双射的，则对任意的 $x\in A$，有 $f^{-1}(f(x))=x$，对任意的 $y\in B$，有 $f(f^{-1}(y))=y$.

证明 对任意的 $x\in A$，因为 f 是函数，则有 $\langle x,f(x)\rangle\in f$，有 $\langle f(x),x\rangle\in f^{-1}$. 因为 f^{-1} 是函数，则可写为 $f^{-1}(f(x))=x$.

对任意的 $y\in B$，类似可证 $f(f^{-1}(y))=y$.

由定理，对任意的 $x\in A$，$f^{-1}(f(x))=x$，则 $(f^{-1}\circ f)(x)=x$，于是 $f^{-1}\circ f=I_A$. 同理也有，$f\circ f^{-1}=I_B$. 对非双射的函数 $f:A\to B$，是否存在函数 $g:B\to A$ 使 $g\circ f=I_A$ 呢？是否存

在函数 $h:B\to A$ 使 $f\circ h=I_B$ 呢?

定义 11.2.2 设 $f:A\to B, g:B\to A$,如果 $g\circ f=I_A$,则称 g 为 f 的左逆;如果 $f\circ g=I_B$,则称 g 为 f 的右逆.

例 5 设

$$f_1:\{a,b\}\to\{0,1,2\},$$
$$f_2:\{a,b,c\}\to\{0,1\},$$
$$f_3:\{a,b,c\}\to\{0,1,2\},$$

如图 11.2.2 所示.则 f_1 存在左逆 g_1,不存在右逆.f_2 存在右逆 h_2,不存在左逆.f_3 即存在左逆 g_3,又存在右逆 h_3,且 $g_3=h_3=f_3^{-1}$.如图 11.2.2 所示.

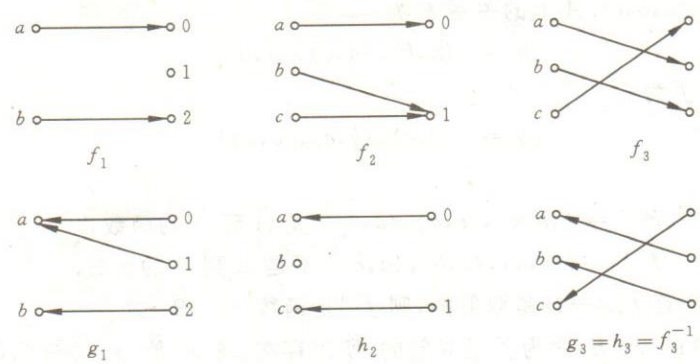

图 11.2.2

定理 11.2.8 设 $f:A\to B, A\neq\varnothing$,则

(1) f 存在左逆,当且仅当 f 是单射的;

(2) f 存在右逆,当且仅当 f 是满射的;

(3) f 存在左逆又存在右逆,当且仅当 f 是双射的;

(4) 若 f 是双射的,则 f 的左逆等于右逆.

证明

(1) 先证必要性.设存在 $x_1,x_2\in A$,使得 $f(x_1)=f(x_2)$.设 g 为 f 的左逆,则

$$\begin{aligned} x_1 &= (g\circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \\ &= (g\circ f)(x_2) = x_2 \end{aligned}$$

所以,f 是单射的.

再证充分性.因为 f 是单射的,所以 $f:A\to \operatorname{ran}(f)$ 是双射的.则 $f^{-1}:\operatorname{ran}(f)\to A$ 也是双射的.已知 $A\neq\varnothing$,则$\exists a\in A$,构造 $g:B\to A$ 为

$$g(y)=\begin{cases} f^{-1}(y), & \text{当 } y\in \operatorname{ran}(f) \\ a, & \text{当 } y\in B-\operatorname{ran}(f) \end{cases}$$

显然,g 是函数 $g:B\to A$.对任一 $x\in A$,有

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = f^{-1}(f(x)) = x,$$

所以,$g\circ f=I_A$,g 的构造如图 11.2.3,实箭头表示 g,虚箭头表示 f.

(2) 先证必要性.设 f 的右逆为 $h:B\to A$,有 $f\circ h=I_B$.则对任意的 $y\in B$,存在 $x\in A$,使 $h(y)=x$,则

$y=I_B(y)=(f\circ h)(y)=f(h(y))=f(x)$,所以,$f$ 是满射的.

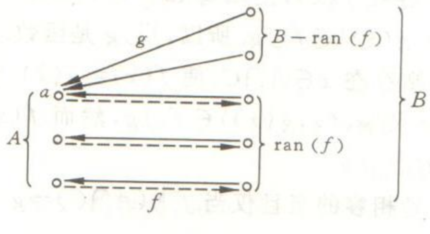

图 11.2.3　f 的左逆 g

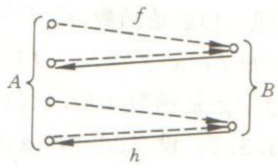

图 11.2.4　f 的右逆 h

再证充分性.(注意,不能取 $h=f^{-1}$,因为 f^{-1} 不一定是函数,只是关系.)因为 f 是满射的,所以 $\mathrm{ran}(f)=\mathrm{dom}(f^{-1})=B$. 依据选择公理,对关系 f^{-1},存在函数 $h\subseteq f^{-1}$,且有 $\mathrm{dom}(h)=\mathrm{dom}(f^{-1})=B$,且 $\mathrm{ran}(h)\subseteq\mathrm{ran}(f^{-1})=A$. 即 $h:B\to A$,对任意的 $y\in B$,存在 $x\in A$,使 $h(y)=x$ 且 $f(x)=y$. 则

$$(f\circ h)(y)=f(h(y))=f(x)=y.$$

所以,$f\circ h=I_B$,h 是 f 的右逆. h 的构造如图 11.2.4. 实箭头表示 h,虚箭头表示 f.

(3) 由(1),(2)得证.

(4) 设 f 的左逆为 $g:B\to A$,右逆为 $h:B\to A$,则 $g\circ f=I_A$,$f\circ h=I_B$.

$$g=g\circ I_B=g\circ(f\circ h)=(g\circ f)\circ h=I_A\circ h=h$$

所以,$g=h$.