2.6 范　式

由 n 个命题变项所能组成的具有不同真值的命题公式有 2^{2^n} 个，然而与任何一个命题公式等值而形式不同的命题公式可以有无穷多个.这样，首先就要问凡与命题公式 A 等值的公式，能否都可以化为某一个统一的标准形式.希望这种标准形能为我们的讨论带来些方便，如借助于标准形对任意两个形式上不同的公式，可判断它们是否等值.借助于标准形容易判断任一公式是否为重言式或矛盾式.

标准形或范式这类术语在数学上是常见的，如几何学中 $x^2+y^2=r^2$，$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 分别是圆和椭圆的范式.

2.6.1 范式

为叙述方便，先定义几个术语.

简单命题 P 及其否定式 $\neg P$ 统称文字.

一些文字的合取称合取式.

一些文字的析取称析取式(也称子句).

P 与 $\neg P$ 称为互补对.

如 $P, \neg P, \neg P \wedge Q, P \wedge \neg Q \wedge \neg P$ 都是合取式，而 $P, \neg P, P \vee Q, P \vee Q \vee \neg Q$ 都是析取式.

析取范式是形如

$$A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n$$

的公式，其中 $A_i (i=1, \cdots, n)$ 为合取式.

合取范式是形如

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n$$

的公式，其中 $A_i (i=1, \cdots, n)$ 为析取式.

(1) **范式定理**　任一命题公式都存在有与之等值的合取范式和析取范式.

可通过求范式的具体步骤，来认识范式定理的正确性.

(2) 求范式的步骤

对一个已给的公式，可按下述步骤求得该公式的合取范式和析取范式.

① 消去已给公式中的联结词→和↔. 这可利用如下等值式：

$$A \to B = \neg A \vee B$$

$$A \leftrightarrow B = (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \qquad \text{(多用于求合取范式)}$$

$$= (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B) \qquad \text{(多用于求析取范式)}$$

因范式中不出现→，↔符号，将它们以范式中出现的符号 ¬，∨，∧ 来表示是自然的.

② 重复使用摩根律和双重否定律，把否定词内移到直接作用于命题变项上. 这可利用等值式：

$$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$$

$$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$$

$$\neg\neg A = A$$

将所有的否定词，都内移到命题变项前，这也是范式的要求.

③ 重复使用分配律. 这可利用等值式：

$$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \qquad \text{(多用于求析取范式)}$$

$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C) \qquad \text{(多用于求合取范式)}$$

将公式化成一些合取式的析取，或化成一些析取式的合取，都必须使用分配律来实现.

对任一公式，经步骤①，②，③必能化成范式. 而且所求得的范式与该公式等值.

(3) 求范式举例

例 1　求 $\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$ 的析取范式.

解　$\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$

$= (\neg(P \vee Q) \wedge (P \wedge Q)) \vee (\neg\neg(P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q))$

$= (\neg P \wedge \neg Q \wedge P \wedge Q) \vee ((P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q))$　　(摩根律、双重否定)

$= (\neg P \wedge \neg Q \wedge P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg P) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg P) \vee (Q \wedge \neg Q)$ (分配律)

这已是析取范式了. 又因 $P \wedge \neg P$，$Q \wedge \neg Q$，$\neg P \wedge \neg Q \wedge P \wedge Q$ 都是矛盾式，从而利用节 2.2.1 的同一律 $P \vee F = P$，还可简化为

$$(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)$$

可见一公式的范式不是唯一的.

例 2 求 $(P\vee Q)\leftrightarrow(P\wedge Q)$的合取范式

解 $(P\vee Q)\leftrightarrow(P\wedge Q)$

$= (\neg(P\vee Q)\vee(P\wedge Q))\wedge(\neg(P\vee Q)\vee\neg(P\wedge Q))$

$= ((P\vee Q)\vee(P\wedge Q))\wedge((\neg P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\vee\neg Q))$ (摩根律、双重否定)

$= (P\vee Q)\wedge(\neg P\vee\neg Q)$ (吸收律)

也可由已求得的一种范式,使用分配律来求另一种范式.如依例1求得的析取范式,便可得合取范式.

$(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)$

$= (P\vee\neg P)\wedge(P\vee Q)\wedge(\neg Q\vee\neg P)\wedge(\neg Q\vee Q)$ (分配律)

$= (P\vee Q)\wedge(\neg P\vee\neg Q)$ (同一律)

这是合取范式了,同例2的结果.反过来,由合取范式使用分配律便可得析取范式.

求一个公式的析取范式和合取范式的步骤是一样的.不同的是选取合适的等值式和分配律,以使形成相应的范式.

(4) 范式可用来判断重言式和矛盾式

若一公式的合取范式中,所有的析取式都至少含有一个互补对,则该范式及相应的公式必为重言式.

若一公式的析取范式中,所有的合取式都至少含有一个互补对,则该范式及相应的公式必为矛盾式.

2.6.2 主范式

一个公式的范式不是唯一的,因此使用范式判别几个公式是否相等就比较困难了.另外,人们也期望范式具有唯一性.为此引入主(优)范式的概念.

(1) 主析取范式

对 n 个命题变项 $P_1,\cdots,P_n$来说,所组成的公式

$$Q_1\wedge Q_2\wedge\cdots\wedge Q_n$$

其中 $Q_i = P_i$或$\neg P_i(i = 1,\cdots,n)$,则称 $Q_1\wedge\cdots\wedge Q_n$为极小项,并以 m_i表示.

极小项必须含有 $Q_1,\cdots,Q_n$全部 n 个文字.

由两个命题变项 P_1, P_2可构成四个极小项:$\neg P_1\wedge\neg P_2$、$\neg P_1\wedge P_2$, $P_1\wedge\neg P_2$和 $P_1\wedge P_2$.若将 P_i与1对应,而$\neg P_i$与0对应,进而将极小项

$\neg P_1\wedge\neg P_2$与00对应,简记为 m_0.

$\neg P_1\wedge P_2$与01对应,简记为 m_1.

$P_1\wedge\neg P_2$与10对应,简记为 m_2.

$P_1\wedge P_2$与11对应,简记为 m_3.

n 个命题变项 $P_1,\cdots,P_n$可组成 2^n 个极小项.每个极小项也可以 m_i表示,$0\leqslant i\leqslant 2^n-1$.

定义 2.6.1 仅由极小项构成的析取式为主析取范式.

定理 2.6.1 任一含有 n 个命题变项的公式,都有唯一的一个与之等值的恰仅含这 n

个命题变项的主析取范式.

使用真值表列写公式的方法,以及将析取范式中的合取式填满命题变项的方法,都可得到一个公式的主析取范式.

例 3 用真值表法将 $P \leftrightarrow Q$ 化成主析取范式.

由 P、Q 到 $P \leftrightarrow Q$ 的真值表图 1.2.6,从 T 列写 $P \leftrightarrow Q$,便得

$$P \leftrightarrow Q = (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q) = m_0 \vee m_3$$

并简记为 $\vee_{0,3}$. 这便是 $P \leftrightarrow Q$ 的主析取范式.

又因为等值公式都有相同的真值表,从而可知所有等值公式(变项均为 n)的主析取范式是相同的,或说一个公式的主析取范式是唯一的.

例 4 用填满命题变项法,将 $P \rightarrow Q$ 的析取范式化成主析取范式.

$$P \rightarrow Q = \neg P \vee Q$$

已是 $P \rightarrow Q$ 的析取范式. 现将这范式中的合取式 $\neg P$ 添加变项 Q,合取式 Q 添加 P,即填满变项 P、Q,以构成极小项.

$$\neg P = \neg P \wedge (Q \vee \neg Q) = (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$$
$$Q = Q \wedge (P \vee \neg P) = (Q \wedge P) \vee (Q \wedge \neg P)$$

从而

$$\begin{aligned} P \rightarrow Q &= \neg P \vee Q = (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q) \\ &= (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge Q) \\ &= m_0 \vee m_1 \vee m_3 = \vee_{0,1,3} \end{aligned}$$

这便是 $P \rightarrow Q$ 的主析取范式.

(2) 极小项的性质

① 对一个含有 n 个变项的公式来说,所有可能的极小项个数和该公式的解释个数一样多,都是 2^n.

② 每个极小项只在一个解释下为真.

③ 极小项两两不等值,而且 $m_i \wedge m_j = \mathrm{F}$ $(i \neq j)$.

④ 任一含有 n 个变项的公式,都可由 k 个($k \leqslant 2^n$)极小项的析取来表示. 或说所有的极小项可建立一个"坐标系".

恰由 2^n 个极小项的析取构成的公式,必为重言式. 即

$$\bigvee_{i=0}^{2^n-1} m_i = \mathrm{T}$$

若 A 由 k 个极小项的析取组成,那么其余的 $2^n - k$ 个极小项的析取必是公式 $\neg A$. 如由 P_1、P_2、P_3 构成的 $A = \vee_{0,2,4}$,则 $\neg A = \vee_{1,3,5,6,7}$.

(3) 主合取范式

由 n 个命题变项 P_1,…,P_n 所组成的公式

$$Q_1 \vee Q_2 \vee \cdots \vee Q_n$$

其中 $Q_i = P_i$ 或 $\neg P_i$ $(i = 1, \cdots, n)$,则称 $Q_1 \vee \cdots \vee Q_n$ 为极大项,并以 M_i 表示.

极大项必须含有 Q_1、…、Q_n 全部 n 个文字.

由两个命题变项 P_1、P_2 可构成四个极大项:$\neg P_1 \vee \neg P_2$、$\neg P_1 \vee P_2$、$P_1 \vee \neg P_2$ 和 $P_1 \vee P_2$,并分别以 M_0、M_1、M_2 和 M_3 表示.

n 个命题变项 P_1，…、P_n可组成 2^n 个极大项. 每个极大项也可以 M_i来表示，$0 \leqslant i \leqslant 2^n-1$.

定义 2.6.2 仅由极大项构成的合取式为主合取范式.

定理 2.6.2 任一含有 n 个命题变项的公式，都有唯一的一个与之等值的恰仅含这 n 个命题变项的主合取范式.

同样使用真值表列写公式的方法，以及将合取范式中的析取式填满命题变项的方法都可得到一个公式的唯一的主合取范式.

例 5 用真值表法将 $P \leftrightarrow Q$ 化成主合取范式.

依由 P,Q 到 $P \leftrightarrow Q$ 的真值表，从 F 列写 $P \leftrightarrow Q$，便得

$$P \leftrightarrow Q = (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) = M_1 \wedge M_2$$

并简记为 $\wedge_{1,2}$. 这便是 $P \leftrightarrow Q$ 的主合取范式.

例 6 用填满命题变项法，将已为合取范式的 $P \wedge Q$ 化为主合取范式.

$$\begin{aligned} P \wedge Q &= (P \vee (Q \wedge \neg Q)) \wedge (Q \vee (P \wedge \neg P)) \\ &= (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (Q \vee P) \wedge (Q \vee \neg P) \\ &= (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q) = M_1 \wedge M_2 \wedge M_3 = \wedge_{1,2,3} \end{aligned}$$

(4) 极大项的性质

① 对一个含有 n 个变项的公式来说，所有可能的极大项个数和该公式的解释个数一样多，都是 2^n.

② 每个极大项只在一个解释下为假.

③ 极大项两两不等值，而且 $M_i \vee M_j = \mathrm{T}$ $(i \neq j)$.

④ 任一含有 n 个变项的公式，都可由 k 个($k \leqslant 2^n$)极大项的合取来表示. 或说可将所有的极大项建立一个"坐标系".

恰由 2^n 个极大项的合取构成的公式，必为矛盾式. 即

$$\bigwedge_{i=0}^{2^n-1} M_i = \mathrm{F}$$

若 A 由 k 个极大项的合取组成，那么其余的 2^n-k 个极大项的合取必是公式$\neg A$. 如由 P_1，P_2，P_3构成的 $A = \wedge_{0,2,5}$则$\neg A = \wedge_{1,3,4,6,7}$

(5) 主析取范式与主合取范式间的转换

以三个变项的情形为例加以说明.

若已知 A 的主析取范式，如

$$\begin{aligned} A &= \vee_{0,1,4,5,7} \\ &= \wedge_{(\{0,1,\cdots,7\}-\{0,1,4,5,7\})补} \\ &= \wedge_{2,3,6补} \\ &= \wedge_{5,4,1}. \end{aligned}$$

若已知 A 的主合取范式，如

$$\begin{aligned} A &= \wedge_{1,4,5} \\ &= \vee_{(\{0,1,\cdots,7\}-\{1,4,5\}补)} \\ &= \vee_{(\{0,1,\cdots,7\}-\{6,3,2\})} \\ &= \vee_{0,1,4,5,7} \end{aligned}$$

从真值表列写公式的主析取范式、主合取范式时，除分别从 T 和 F 列写外，在填写合取式和析取式时是取变项还是变项的否定是有区别的，这就是主合取范式、主析取范式的转换过程要求补的原因（求补是对 $2^n-1=2^3-1=7$ 而言的，如 2 的补为 5，因为 $2+5=7$）.

2.7 推理形式

2.7.1 推理形式

将以自然语句描述的推理关系，引入符号，抽象化并以条件式表示出来便得一种推理形式.

例 1 如果今天我病了，那么我没来上课.

今天我病了.

所以今天我没来上课.

这是自然语句给出的三个命题，有前提有结论，表示了一种推理关系.

引入符号，以 P 表示今天我病了，Q 表示我没来上课. 便可将这推理关系以条件式

$$((P\to Q)\wedge P)\to Q$$

来表示.

也可以用图式表示：

$$\begin{array}{lcc} P\to Q & 前 & 提 \\ \underline{P\qquad} & \underline{前} & \underline{提} \\ Q & 结 & 论 \end{array}$$

这个条件式或图式就是一种推理形式. 说明如果 P 真，$P\to Q$ 真，就可推得 Q 真，这里的 P,Q 可表任意命题，从而推理形式

$$((P\to Q)\wedge P)\to Q$$

反映了一类推理关系.

例 2 如果 P，则 Q.

非 P.

所以非 Q.

以条件式描述这种推理关系，得推理形式

$$((P\to Q)\wedge\neg P)\to\neg Q$$

说的是，如果 $P\to Q$ 真，P 假就可推得 Q 假. 自然这推理形式也反映了一类推理关系.

例 3 如果 P，则 Q.

非 Q.

所以非 P.

同样以条件式描述这种推理关系，得推理形式

$$((P\to Q)\wedge\neg Q)\to\neg P$$

表明，如果 $P\to Q$ 真而 Q 假，就可推得 P 假. 同样这类推理形式反映的是一类推理关系.

由于推理形式由前提和结论部分组成，使用蕴涵词 $\to$ 表示的条件式是自然的，因为 $\to$ 可

描述因果关系.

按例 1～3 建立推理形式的办法，可以引入任意多个推理形式. 自然要问它们都是正确的吗？

不正确的推理形式不是逻辑规律，只有正确的推理形式才是有意义的，才能用来推理.

定义 2.7.1 前提真，结论必真的推理形式为正确的推理形式.

不难理解，例 1 和例 3 所建立的推理形式

$$((P\to Q)\wedge P)\to Q$$

$$((P\to Q)\wedge\neg Q)\to\neg P$$

是正确的.

而例 2 建立的推理形式

$$((P\to Q)\wedge\neg P)\to\neg Q$$

是不正确的.

2.7.2 重言蕴涵

如果给定两个公式 A、B，只要 A 取值为真，B 就必取值为真，便称 A 重言(永真)蕴涵 B. 或称 B 是 A 的逻辑推论. 并用符号

$$A\Rightarrow B$$

表示.

符号"⇒"表示两个公式间的一种真值关系，它不是逻辑联结词，$A\Rightarrow B$ 也不是合式公式.

对以 $A\to B$ 表示的推理形式来说，推理形式是正确的，就同 A 重言蕴涵 B 是同一概念了，于是正确的推理形式便可以 $A\Rightarrow B$ 表示了.

可用真值表法，直接判断 $A\Rightarrow B$ 是否成立. 如果 A、B 依赖于 n 个命题变项 P_1，…，P_n，列出由 P_1，…，P_n 到 A 和 B 的真值表，然后查看，所有使 A 为真的解释，相应的 B 是否也都为真.

例 4 $P\Rightarrow P\vee Q$ 正确否？

列出真值表

P	Q	$P\vee Q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

图 2.7.1

所有使 P 为真的解释是 $\{P, Q\}=\{T, F\}$，$\{P, Q\}=\{T, T\}$，即图 2.7.1 的第 3、第 4 行. 这时 $P\vee Q$ 均取值为 T，从而有 $P\Rightarrow P\vee Q$. 也可以说推理形式

$$P\to(P\vee Q)$$

是正确的.

2.7.3 重言蕴涵的几个结果

(1) 如果 $A \Rightarrow B$，A 为重言式，则 B 也是重言式.

由 $A \Rightarrow B$，知对 A、B 来说的任一解释下，若 A 真 B 必真. 而 A 为重言式，对任一解释下 A 都真，从而任一解释下 B 也真，故 B 也是重言式.

(2) 如果 $A \Rightarrow B$，$B \Rightarrow A$ 同时成立，必有 $A = B$.

在任一解释下，由 $A \Rightarrow B$ 知若 A 真有 B 真. 由 $B \Rightarrow A$ 知若 B 真有 A 真，或说成是若 A 假必有 B 假. 从而任一解释下 A、B 同时为真同时为假. 故 $A = B$.

反过来，$A = B$ 也必有 $A \Rightarrow B$ 和 $B \Rightarrow A$.

(3) 如果 $A \Rightarrow B$，$B \Rightarrow C$，则 $A \Rightarrow C$.

(4) 如果 $A \Rightarrow B$，$A \Rightarrow C$，则 $A \Rightarrow B \wedge C$.

(5) 如果 $A \Rightarrow C$，$B \Rightarrow C$，则 $A \vee B \Rightarrow C$.

2.8 基本的推理公式

为了进行推理演算，引入一些基本的重言蕴涵式，作为基本的推理公式(或称推理定律). 对这些公式可用真值表法加以验证，也可给予直观的语义说明.

这节还介绍证明 $A \Rightarrow B$ 的几种方法.

2.8.1 基本的推理公式

(1) $P \wedge Q \Rightarrow P$.

(2) $\neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow P$.

(3) $\neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg Q$.

(4) $P \Rightarrow P \vee Q$.

(5) $\neg P \Rightarrow P \rightarrow Q$.

(6) $Q \Rightarrow P \rightarrow Q$.

(7) $\neg P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q$.

(8) $P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$.

(9) $\neg Q \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg P$.

(10) $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow P \rightarrow R$.

(11) $(P \leftrightarrow Q) \wedge (Q \leftrightarrow R) \Rightarrow P \leftrightarrow R$.

(12) $(P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) \wedge (P \vee Q) \Rightarrow R$.

(13) $(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \wedge (P \vee R) \Rightarrow Q \vee S$.

(14) $(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \wedge (\neg Q \vee \neg S) \Rightarrow \neg P \vee \neg R$.

(15) $(Q \rightarrow R) \Rightarrow ((P \vee Q) \rightarrow (P \vee R))$.

(16) $(Q \rightarrow R) \Rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$.

使用真值表法证明这些推理公式是容易的,可按节 2.7.2 例 4 的办法.

若从语义上给予直观说明也是不难的.如公式(2),$\neg(P\to Q)\Rightarrow P$.公式(3),$\neg(P\to Q)\Rightarrow\neg Q$.意思是说,若 $P\to Q$ 不成立(取假),必有 P 为真,还有 Q 为假.这从 $P\to Q$ 的定义可知,因只有当 $P=\mathrm{T}$ 而 $Q=\mathrm{F}$ 时,$P\to Q=\mathrm{F}$.又如公式(7),$\neg P\wedge(P\vee Q)\Rightarrow Q$.意思是说,$P$ 不对,而 $P\vee Q$ 又对,必然有 Q 对.

公式(8),$P\wedge(P\to Q)\Rightarrow Q$ 常称作假言推理,或称作分离规则,是最常使用的推理公式.

公式(10),$(P\to Q)\wedge(Q\to R)\Rightarrow P\to R$ 常称作三段论.

2.8.2 证明推理公式的方法

2.1 节的等值定理,说明了 $A=B$ 同 $A\leftrightarrow B$ 为重言式是等价的,从而可用 $A\leftrightarrow B$ 是重言式来证明 $A=B$.从而有理由期望 $A\Rightarrow B$ 同 $A\to B$ 是重言式也是等价的.

定理 2.8.1 $A\Rightarrow B$ 成立的充分必要条件是 $A\to B$ 为重言式.

证明 设 $A\Rightarrow B$ 成立.从而在任一解释下,A 真必有 B 真.而不会出现 A 真 B 假的情形,于是 $A\to B$ 必为重言式.

反过来,设 $A\to B$ 为重言式,从而在任一解释下,若 A 真,B 只能为真不可能为假.从而有 $A\Rightarrow B$.

定理 2.8.2 $A\Rightarrow B$ 成立的充分必要条件是 $A\wedge\neg B$ 是矛盾式.

证明是容易的.因$\neg(A\to B)=\neg(\neg A\vee B)=A\wedge\neg B$.从而 $A\to B$ 为真,$A\wedge\neg B$ 必为假.依定理 2.8.1,$A\Rightarrow B$ 等价于 $A\to B$ 是重言式,从而等价于 $A\wedge\neg B$ 是矛盾式.

这两个定理说明了可用 $A\to B$ 是重言式或 $A\wedge\neg B$ 是矛盾式来证明推理公式 $A\Rightarrow B$.另外,还可以利用下面的结论或方法证明推理公式.

(1) 若$\neg B\Rightarrow\neg A$ 必有 $A\Rightarrow B$.

从而若使 B 为假的解释下也有 A 为假,便得 $A\Rightarrow B$.

这种证明方法是显然的,若将 $A\Rightarrow B$ 视为定理,那么$\neg B\Rightarrow\neg A$ 就是其逆否定理.两者必同时成立.

(2) 解释法证明 $A\Rightarrow B$.

以 $(P\to Q)\wedge(Q\to R)\Rightarrow P\to R$ 为例来说明.

设 $(P\to Q)\wedge(Q\to R)=\mathrm{T}$,从而有

$$P\to Q=\mathrm{T}$$
$$Q\to R=\mathrm{T}$$

若 $P=\mathrm{T}$,必有 $Q=\mathrm{T}$ 以及 $R=\mathrm{T}$.从而 $P\to R=\mathrm{T}$.而若 $P=\mathrm{F}$ 右端必成立.故这三段论推理式成立.

(3) 真值表法.

已使用过不再说明了.

对 $A\Rightarrow B$ 的证明,一般前提

$$A=A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_n$$

还需说明的是应首先验证一下 $A_1,\cdots,A_n$的一致性,即 A 自身不能为假.如果 $A_1,\cdots,A_n$不

是一致的而是有矛盾的，从而 A 为假，这时不管结论 B 是什么公式，$A\Rightarrow B$ 都是成立的，但这种推理是没有实用意义的.

2.9 推理演算

节 2.8.2 给出的证明 $A\Rightarrow B$ 的几种方法，都是从真值的角度进行解释或论证的，其中真值表法最为直观. 然而这些方法的共同缺点是看不出由前提 A 到结论 B 的推演过程. 而且这些方法也难于在谓词逻辑中使用.

可建立推理过程的证明方法，是由引入几条推理规则，并考虑到基本的推理公式来实现的. 从前提 $A_1,\cdots,A_n$ 出发，通过使用推理规则和基本的推理公式，逐步推演出结论 B. 这种方法推演层次清晰，更近于数学的推理，而且也容易推广到谓词逻辑.

2.9.1 推理规则

这里所列出的几条规则，较 2.8.1 节的基本推理公式更为一般化. 在推理过程中，推理规则和基本推理公式配合使用.

(1) 前提引入规则　在推理过程中，可以随时引入前提.

(2) 结论引用规则　在推理过程中所得到的中间结论，可作为后续推理的前提.

(3) 代入规则　在推理过程中，对重言式中的命题变项可使用代入规则.

(4) 置换规则　在推理过程中，命题公式中的任何部分公式都可以用与之等值的命题公式来置换.

(5) 分离规则(假言推理)　如果已知命题公式 $A\rightarrow B$ 和 A，则有命题公式 B.

(6) 条件证明规则　$A_1\wedge A_2\Rightarrow B$ 与 $A_1\Rightarrow A_2\rightarrow B$ 是等价的.

其中(1)，(2)在推理过程中显然是常用的，正确性是自然的. 代入规则和置换规则已作过说明，再明确一下代入规则仅可对重言式使用. 分离规则就是基本的推理公式，由于它的重要性而列为推理规则，是在 $A\rightarrow B$，A 成立的条件下，将 B 分离出来的规则，最为常用. 规则(6)可将对 $A_1\Rightarrow A_2\rightarrow B$ 的证明化为 $A_1\wedge A_2\Rightarrow B$ 的证明. 意思是说，可将要证明的结论 $A_2\rightarrow B$ 中的 A_2 作为条件来使用，从而简化了证明.

2.9.2 使用推理规则的推理演算举例

例 1　证明 R 是 $P\rightarrow Q$，$Q\rightarrow R$，P 的逻辑推论.

证明

(1) P	前提引入
(2) $P\rightarrow Q$	前提引入
(3) Q	(1) (2)分离
(4) $Q\rightarrow R$	前提引入
(5) R	(3) (4) 分离

例 2　证明 $R\vee S$ 可以由前提 $C\vee D$，$(C\vee D)\rightarrow\neg E$，$\neg E\rightarrow(A\wedge\neg B)$，$(A\wedge\neg B)\rightarrow$

$(R\vee S)$推演出来.

证明

(1) $((C\vee D)\rightarrow\neg E)$	前提引入
(2) $\neg E\rightarrow(A\wedge\neg B)$	前提引入
(3) $((C\vee D)\rightarrow(A\wedge\neg B)$	(1) (2)三段论
(4) $(A\wedge\neg B)\rightarrow(R\vee S)$	前提引入
(5) $(C\vee D)\rightarrow(R\vee S)$	(3) (4)三段论
(6) $C\vee D$	前提引入
(7) $R\vee S$	(5) (6)分离

这个例子中出现 7 个命题变项，列写真值表就有 $2^7=128$ 行，其繁琐程度可想而知. 使用真值表法实现这个证明是太繁了. 若要证明

$$(C\vee D)\wedge((C\vee D)\rightarrow\neg E)\wedge(\neg E\rightarrow(A\wedge\neg B))\wedge((A\wedge\neg B)\rightarrow(R\vee S))\rightarrow(R\vee S)$$

为重言式也是相当复杂的.

例 3 证明$(P\vee Q)\wedge(P\rightarrow R)\wedge(Q\rightarrow S)\Rightarrow S\vee R$.

证明

(1) $P\vee Q$	前提引入
(2) $\neg P\rightarrow Q$	(1) 置换
(3) $Q\rightarrow S$	前提引入
(4) $\neg P\rightarrow S$	(2) (3) 三段论
(5) $\neg S\rightarrow P$	(4) 置换
(6) $P\rightarrow R$	前提引入
(7) $\neg S\rightarrow R$	(5) (6)三段论
(8) $S\vee R$	(7) 置换

这个例子说明，证明过程中、将 $P\vee Q$ 写成$\neg P\rightarrow Q$ 更便于推理.

例 4 证明$(P\rightarrow(Q\rightarrow S))\wedge(\neg R\vee P)\wedge Q\Rightarrow R\rightarrow S$.

证明

(1) $\neg R\vee P$	前提引入
(2) $R\rightarrow P$	(1) 置换
(3) R	附加前提引入
(4) P	(2) (3) 分离
(5) $P\rightarrow(Q\rightarrow S)$	前提引入
(6) $Q\rightarrow S$	(4) (5) 分离
(7) Q	前提引入
(8) S	(6) (7) 分离
(9) $R\rightarrow S$	条件证明规则

这例子说明使用条件证明规则，将结论 $R\rightarrow S$ 中的 R 作为前提，来证明 S 简化了证明过程.

例 5 证明$(\neg(P\rightarrow Q)\rightarrow\neg(R\vee S))\wedge((Q\rightarrow P)\vee\neg R)\wedge R\Rightarrow(P\leftrightarrow Q)$.

证明

(1) $\neg(P\leftrightarrow Q)$	附加前提(要证公式的否定)引入
(2) $\neg((P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P))$	(1) 置换
(3) $\neg(P\rightarrow Q)\vee\neg(Q\rightarrow P)$	(2) 置换
(4) $(Q\rightarrow P)\rightarrow\neg(P\rightarrow Q)$	(3) 置换
(5) $\neg(P\rightarrow Q)\rightarrow\neg(R\vee S)$	前提引入
(6) $(Q\rightarrow P)\rightarrow\neg(R\vee S)$	(4) (5) 三段论
(7) $(Q\rightarrow P)\vee\neg R$	前提引入
(8) $R\rightarrow(Q\rightarrow P)$	(7) 置换
(9) $R\rightarrow\neg(R\vee S)$	(6) (8) 三段论
(10) R	前提引入
(11) $\neg(R\vee S)$	(9) (10) 分离
(12) $\neg R\wedge\neg S$	(11) 置换
(13) $\neg R$	(12)
(14) $R\wedge\neg R$	(10) (13)
(15) 矛盾	(14)

这个证明过程,使用了定理 2.8.2.

从这些例子可以看出,一个推理过程,或说 $A\Rightarrow B$ 的一个证明,是由一些公式的序列所组成,其中每个公式是前提,或是中间结果,或是最后结论.

第 4 章　谓词逻辑的基本概念

第 3 章讨论的是命题逻辑，包括基本概念、等值和推理演算、公理化. 第 4,5,6 章将讨论谓词逻辑的基本概念、等值和推理演算、公理化.

在命题逻辑中，是把简单命题作为基本单元或说作为原子来看待的，不再对简单命题的内部结构进行分析. 如命题

"$\sqrt{2}$是无理数"

"$\sqrt{3}$是无理数"

是作为两个独立的命题看待的，不考虑这个命题间的联系. 事实上这两个命题仍可作分解，它们都有主词和谓词，这样的细分带来的好处是可将这两个有相同谓词("是无理数")的命题联系起来. 又如

凡有理数都是实数.

2/7 是有理数.

所以　2/7 是实数.

直观上看这样的推理应该是正确的. 然而在命题逻辑里就不能描述这种推理. 设这三个命题分别以 p,q,r 表示，相应的推理形式为

$$(p \wedge q) \rightarrow r$$

由于对任意的 p,q,r 来说这推理形式并非重言式，也就是说这个推理形式不是正确的. 对这样的人们熟知的推理关系在命题逻辑中得不到正确的描述，自然是命题逻辑的局限性.

只有对简单命题做进一步剖析，才能认识这种推理规律. 这就需要引人谓词、引入变量并考虑到表示变量的数量上一般与个别的全称量词和存在量词，进而研究它们的形式结构和逻辑关系，这便构成了谓词逻辑.

为方便起见，第 4、5、6 章的讨论，约定以小写字母表示命题，而以大写字母来表示谓词.

所介绍的内容限于一阶谓词逻辑或称狭谓词逻辑，将会看到谓词逻辑较命题逻辑复杂得多.

4.1　谓词和个体词

4.1.1　谓词

例　张三是学生.

李四是学生.

在命题逻辑里，这是两个不同的命题，只能分别以两个不同的符号如 p,q 表示了. 然而分析一下这两个命题的共同点，它们都有主词和谓词，不同的是主词"张三"、"李四"，而谓词"是学生"是相同的，现在我们强调它们的共同点. 若以大写符号 P 表示"是学生"，这样两个

命题的共同性可由 P 来体现了，但主词还需区别开来，便可把这两个命题分别写成

P(张三)

和　　P(李四).

明显地描述了这两个命题的共同点和不同点. 自然一般地可引入变量 x 来表示主词，于是符号 $P(x)$就表示"x 是学生". 通常把 $P(x)$称作谓词.

可以这样来理解谓词：

在一个命题里，如果主词只有一个，这时表示该主词性质或属性的词便称作谓词. 这是一元(目)谓词，以 $P(x)$，$Q(x)$，…表示.

在一个命题里，如果主词多于一个，那么表示这几个主词间的关系的词称作谓词. 这是多元谓词，以 $P(x,y)$，$Q(x,y)$，$R(x,y,z)$，…表示. 如

"张三和李四是兄弟".	其中"是兄弟"是谓词.
"5 大于 3".	其中"大于"是谓词.
"张三比李四高".	其中"比……高"是谓词.
"天津位于北京的东南".	其中"位于……东南"是谓词.
"A 在 B 上".	其中"在……上"是谓词.

4.1.2　个体词

在数理逻辑中，不使用主词这个词，习惯称为个体词. 它是一个命题里表示思维对象的词. P(张三)中的张三是个体词或称个体常项. 而谓词 $P(x)$中的变量 x 为个体变项或个体变元.

有 n 个个体的谓词 $P(x_1,\cdots,x_n)$称 n 项(目、元)谓词. 如果 P 是已赋有确定含义的谓词，就称为谓词常项，而 P 表任一谓词时，就称为谓词变项.

将个体变项的变化范围称为个体域或论域，以 D 表示. 并约定谓词逻辑的个体域除明确指明外，都认为是包括一切事物的一个最广的集合. 谓词变项的变化范围，不做特别声明时，指一切关系或一切性质的集合.

论域是重要的概念，同一谓词在不同论域下的描述形式可能不同，所取的真假值也可能不同.

4.1.3　谓词的定义

曾将谓词视作为一个个体的性质或多个个体间的关系. 还可进一步抽象地定义，谓词是给定的个体域到集合{T，F}上的一个映射. 如 $P(x)$其中 $x\in D$，而 $P(x)$的取值为 T 或 F.

又如"房子是黄色的"可由谓词

YELLOW (HOUSE)

表示. 当 HOUSE 取值为房子又是黄色的，该命题方为真. 借助于谓词的抽象定义，也可用二元谓词

VALUE (COLOR，HOUSE)

来描述这命题，而 VALUE 就是个体到{T，F}的映射，不一定有什么具体含义. 仅当个体

COLOR 取值为黄色的，HOUSE 取值为房子时 VALUE 就取值为 T.

还需说明，一般地说谓词 $P(x)$,$Q(x,y)$是命题形式而不是命题. 因为这里没有指定谓词符号 P,Q 的含义，即它们是谓词变项. 再者，个体词 x,y 也是个体变项. 从而不可能确定 $P(x)$,$Q(x,y)$的真值是取真还是取假. 仅当谓词变项取定为某个谓词常项，并且个体词取定为个体常项时，命题形式才化为命题. 如 $P(x)$表 x 是有理数，那么 $P(3)$是命题，真值为 T. $Q(x,y)$表 x 大于 y，那么 $Q(2,3)$是命题取值为 F.

谓词的真值依赖于个体变元的论域.

4.1.4 谓词逻辑与命题逻辑

可认为谓词逻辑是命题逻辑的推广，命题逻辑是谓词逻辑的特殊情形. 因为任一命题都可通过引入具有相应含义的谓词(个体词视为常项)来表示，或认为一个命题是没有个体变元的零元谓词.

命题逻辑中的很多概念、规则都可推广到谓词逻辑中延用，如联结词可照搬到谓词逻辑，无需再做说明，有的等值式推理式也可移植到谓词逻辑.

然而谓词逻辑里出现了个体变元，谓词、量词等概念，给我们的讨论带来了复杂性，特别是个体论域常是无限域，加大了处理难度. 最简单又深刻的例子，在命题逻辑里一个公式不难判定它是否是重言式，真值表法是能行的方法. 然而在谓词逻辑里就没有一般的能行算法来判定任一公式是不是普遍有效的(或称定理、永真式).

4.2 函数和量词

4.2.1 函数

在谓词逻辑中出现变量，自然也会考虑引入函数. 而函数本身的含义和通常微积分学里的定义是一致的，只须强调的它是某个体域(不必是实数)到另一个体域的映射(严谨的定义见第 11 章)，不同于将个体映射为真假值的谓词. 而且函数并不单独使用，是嵌入在谓词中.

如函数 father(x)表 x 的父亲，若 $P(x)$表 x 是教师，则 P(father(x))就表示 x 的父亲是教师. 当 x 的取值确定后，P(father(x))的值或为真或为假. 又如“张三的父亲和母亲是夫妻”可描述成 MARRIED(father(张三)，mother(张三))其中谓词 MARRIED(x,y)表示 x 和 y 是夫妻，而 father(x)，mother(x)是函数.

约定函数符号用小写字母表示，如 f,g,father,…. 这不会与以小写字母表示的命题相混的.

4.2.2 量词

用来表示个体数量的词是量词，也可看作是对个体词所加的限制、约束的词，但主要不是对数量一个、二个、三个……的具体描述，而是讨论两个最通用的数量限制词，一个是“所有的”一个是“至少有一个”，分别称作全称量词和存在量词. 在某种意义上说，这是一对相对立的词.

先讨论全称量词. 如

"凡事物都是运动的"

这命题中的"凡"就是表示个体变元数量的词,"凡"的等义词有"所有的"、"一切的"、"任一个"、"每一个". 这句话的意思是说

对任一事物而言,它都是运动的.

或说　对任一 x 而言,x 是运动的.

由于个体 x 的论域是包含一切事物的集合,这句话可形式描述为

$$(\forall x)(x\text{ 是运动的})$$

也可写成

$$(x)(x\text{ 是运动的})$$

$$\forall x(x\text{ 是运动的})$$

若再以 $P(x)$ 表示 x 是运动的,那么还可写成

$$(\forall x)\ (P(x))$$

或简写成 $(\forall x)(Px)$(但 $(\forall x)(P(x)\vee Q(x))$ 不能写成 $(\forall x)P(x)\vee Q(x)$).

符号 $(\forall x)$ 读作所有的 x 或任一 x,一切 x. 而 $\forall$ 就是全称量词,它所约束的个体是 x.

命题 $(\forall x)\ P(x)$ 当且仅当对论域中的所有 x 来说,$P(x)$ 均为真时方为真. 这就是全称量词的定义.

从而 $(\forall x)\ P(x)=\mathrm{F}$ 成立,当且仅当有一个 $x_0\in D$,使 $P(x_0)=\mathrm{F}$.

其次讨论存在量词. 如

"有的事物是动物"

这命题中"有的"就是表示个体变元数量的词,"有的"的等义词有"存在一个"、"有一个"、"有些". 这句话的意思是说

有一事物,它是动物.

或说　有一 x,x 是动物.

可形式描述为

$$(\exists x)(x\text{ 是动物})$$

也可写成

$$\exists x(x\text{ 是动物})$$

如果以 $Q(x)$ 表示 x 是动物,那么这句话就可写成

$$(\exists x)Q(x)$$

符号 $(\exists x)$ 读作至少有一个 x 或存在一个 x 或有某些 x. 而 $\exists$ 就是对个体词起约束作用的存在量词,所约束的变元是 x.

命题 $(\exists x)Q(x)$ 当且仅当在论域中至少有一个 x_0,$Q(x_0)$ 为真时方为真. 这就是存在量词的定义.

从而 $(\exists x)Q(x)=\mathrm{F}$,当且仅当对所有的 $x\in D$ 都有 $Q(x)=\mathrm{F}$.

4.2.3　约束变元和自由变元

在一个含有量词的命题形式里,区分个体词受量词的约束还是不受量词的约束是重要

的．无论在定义合式公式以及对个体变元作代入时都需区分这两种情形．

若 $P(x)$ 表 x 是有理数，这时的变元 x 不受任何量词约束，便称是自由的．而

$$(\forall \dot{x})P(\dot{x})$$

中的两处出现的变元 $\dot{x}$ 都受量词∀ 的约束，便称作约束变元，受约束的变元也称被量词量化了的变元．

命题形式 $(\forall x)P(x)\vee Q(y)$ 中，变元 x 是约束的，而变元 y 是自由的．

就命题形式 $(\forall x)P(x)\vee Q(x)$（如果允许这样书写的话）而言，其中 $(\forall x)\ P(x)$ 中的 x 是约束变元，而 $Q(x)$ 中的 x 是自由变元．

量词所约束的范围称为量词的辖域．如

$(\forall x)R(x,y)$ 中，$R(x,y)$ 是 $(\forall x)$ 的辖域．

$(\exists x)((\forall y)P(x,y))$ 中，$P(x,y)$ 是 $(\forall y)$ 的辖域．

$(\forall y)P(x,y)$ 是 $(\exists x)$ 的辖域．

对命题形式 $P(x)$ 来说，若 $P(x)$ 的含义已确定，即 $P(x)$ 已是谓词常项时，如何化为命题呢？一种办法是将变元 x 确定为某个常项．另一办法是将 x 量化．这时 $(\forall x)P(x)$，$(\exists x)P(x)$ 都是命题了．如 $P(x)$ 表 x 是有理数，那么 $(\forall x)\ P(x)$ 说的是论域 D 上任一 x，x 都是有理数，这话不真，从而 $(\forall x)\ P(x)=\mathrm{F}$．而 $(\exists x)\ P(x)$ 取值为真，因为 D 域中含有有理数．

还指出一点，$(\forall x)\ P(x)$ 和 $(\forall y)\ P(y)$ 含义是一样的，或说不管 $P(x)$ 如何，都有

$$(\forall x)P(x)=(\forall y)P(y)$$

这是不难理解的，因为在同一论域 D 上，对一切 x，x 具有性质 P，同对一切 y，y 具有性质 P，除变元 x 和 y 的区别外并无差异，从而 $(\forall x)P(x)$ 与 $(\forall y)P(y)$ 有相同的真值．这个关系可称作变元易名规则．

4.3 合式公式

像命题逻辑一样，需限定所讨论的命题形式的范围，由于谓词逻辑里引入了个体词、量词，从而带来了复杂性．

首先应明确我们所讨论的谓词逻辑，限定在量词仅作用于个体变元，不允许量词作用于命题变项和谓词变项．不出现

$$(\exists p)(Q(x)\rightarrow p)$$
$$(\exists Q)(Q(x)\vee\neg P(x))$$

这种形式的符号，也不讨论谓词的谓词．这样限定的范围就称作一阶谓词逻辑．这是相对高阶谓词逻辑而言的．

还需说明一下所使用的符号：

命题变项以 $p,q,r,\cdots$ 表示（小写）．

个体变项以 $x,y,z,\cdots$ 表示（小写），个体常项则以大写英文单词表示，有时也以 $a,b,c,\cdots$ 等小写字母表示．

谓词变项以 $P,Q,R,\cdots$ 表示（大写），谓词常项则以大写英文字母表示，如 GREAT，ON 等．

函数以 $f, g, \cdots$ 表示(小写)

五个联结词仍延用命题逻辑的符号.

量词有∀和∃.

还有小括号( ).

这些符号所代表的内容看来有些混乱,但对一个给定的谓词公式来说,容易分辨并不致于出现混淆.

现在的问题是,由上述这些符号可形成哪些我们所关心的符号串,需作约定.

合式公式定义:

(1) 命题常项、命题变项和原子谓词公式(不含联结词的谓词)都是合式公式.

(2) 如果 A 是合式公式,则 $\neg A$ 也是合式公式.

(3) 如果 A,B 是合式公式,而无变元 x 在 A,B 的一个中是约束的而在另一个中是自由的,则 $(A \wedge B)$,$(A \vee B)$,$(A \rightarrow B)$,$(A \leftrightarrow B)$ 也是合式公式(最外层括号可省略).

(4) 如果 A 是合式公式,而 x 在 A 中是自由变元,则 $(\forall x)A$,$(\exists x)A$ 也是合式公式.

(5) 只有适合以上 4 条的才是合式公式.

依定义

$\neg p$,$\neg P(x,y) \vee Q(y)$,$(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x))$,$(\exists x)(A(x) \rightarrow (\forall y)B(x,y))$ 都是合式公式.

然而 $(\forall x)F(x) \wedge G(x)$,$(\exists x)((\forall x)F(x))$,$(\forall x)P(y)$ 都不是合式公式.

并不是说上述形成合式公式的方式是唯一的. 这里给出的是限制较强的. 但不管哪种合式公式的定义,都要求所形成的公式语义上是有意义的,含义是唯一的.

4.4 自然语句的形式化

使用计算机来处理由自然语句或非形式化陈述的问题,首要的工作是问题本身的形式描述.

命题逻辑的表达问题的能力,仅限于联结词的使用. 而谓词逻辑由于变元、谓词、量词和函数的引入具有强得多的表达问题的能力,已成为描述计算机所处理的知识的有力工具. 人工智能学科将谓词逻辑看作是一种基本的知识表示方法和推理方法.

使用谓词逻辑描述以自然语句表达的问题,首先要将问题分解成一些原子谓词,引入谓词符号,进而使用量词、函数、联结词来构成合式公式.

4.4.1 "所有的有理数都是实数"的形式化

所有的有理数都是实数,其意思是说,对任一事物而言,如果它是有理数,那么它是实数. 即对任一 x 而言,如果 x 是有理数,那么 x 是实数. 若以 $P(x)$ 表示 x 是有理数,$Q(x)$ 表示 x 是实数,这句话的形式描述应为

$$(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$$

因为 x 的论域是一切事物的集合,所以 x 是有理数是一个条件.

需注意的是这句话不能形式化为

$$(\forall x)(P(x)\wedge Q(x))$$

这公式的意思是说，对所有的 x，x 是有理数而且又是实数.

“所有的……都是……”，这类语句的形式描述只能使用→而不能使用∧.

所有的有理数都是实数，这句话按人们通常的认识肯定是成立的，取值为真，而且其真值与论域是无关的. 设论域

$$D_1=\left\{\frac{1}{2},\pi,\text{张三},\text{桌子}\right\}$$

含有有理数也含有非有理数. 使用

$$(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))$$

来描述这句话是对的. 因为对所有的 $x\in D_1$ 都有 $P(x)\rightarrow Q(x)=\mathrm{T}$，从而 $(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))=\mathrm{T}$. 如果 D_1 只含有理数或不含任一有理数，仍有 $(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))=\mathrm{T}$. 从而使用→来描述“所有的……都是……”是符合人们的常规理解的.

然而以 $(\forall x)(P(x)\wedge Q(x))$ 来描述，就有问题了，因为仅当 D_1 中只含有理数时，$(\forall x)(P(x)\wedge Q(x))$ 才为真. 即 $(\forall x)(P(x)\wedge Q(x))$ 的取值与论域是有关的，“所有的有理数都是实数”，这句话有时对有时不对，所以这种描述是不合适的.

再者 $(\forall x)(P(x)\wedge Q(x))$ 这种形式的公式，在包含万物的广义的论域上是常取假的，使用得很少.

4.4.2 “有的实数是有理数”的形式化

这句话的意思是说，存在一事物它是实数，而且是有理数. 即有一个 x，x 是实数并且是有理数. 仍以 $P(x)$ 表 x 是有理数，$Q(x)$ 表示 x 是实数，这句话的形式描述应为

$$(\exists x)(Q(x)\wedge P(x))$$

需注意的是不能使用

$$(\exists x)(Q(x)\rightarrow P(x))$$

“有的……是……”这类语句，按人们通常的认识，它的取值是真是假应与个体域有关. 设论域 $D_1=\{\mathrm{e},\pi,\text{张三},\text{桌子}\}$，其中没有有理数，所以在 D_1 上不存在是有理数的实数，故在 D_1 上这句话真值应为假，$(\exists x)(Q(x)\wedge P(x))$ 也确为假. 仅当 D_1 中有有理数时 $(\exists x)(Q(x)\wedge P(x))$ 方为真. 从而这种形式描述是正确的.

若以 $(\exists x)(Q(x)\rightarrow P(x))$ 来描述，就不符合人们的常规理解了. 因为凡在不含实数的论域上都有 $(\exists x)(Q(x)\rightarrow P(x))=\mathrm{T}$，这是不对的.

再者 $(\exists x)(Q(x)\rightarrow P(x))$ 这种形式的公式，在包含万物的广义的论域上常为真，很少使用.

4.4.3 “没有无理数是有理数”的形式化

这句话有否定词，意思是对任一 x 而言，如果 x 是无理数，那么 x 不是有理数. 若以 $A(x)$ 表示 x 是无理数，$B(x)$ 表示 x 是有理数，这句话的形式描述为

$$\neg(\exists x)(A(x)\wedge B(x))$$

也可以逻辑上等价的

$$(\forall x)(A(x)\rightarrow\neg B(x))$$

$$(\forall x)(B(x)\rightarrow\neg A(x))$$

来描述.

4.4.4 "有的实数不是有理数"的形式化

这句话的意思是有的 x,它是实数而且不是有理数.若以 $A(x)$ 表示 x 是实数,$B(x)$ 表示 x 是有理数,那么这句话可形式描述为

$$(\exists x)(A(x)\wedge\neg B(x))$$

4.4.5 自然数集的形式描述

论域是自然数集,来形式化语句.

(1) 对每个数,有且仅有一个相继后元.

(2) 没有这样的数,0 是其相继后元.

(3) 对除 0 而外的数,有且仅有一个相继前元(可将这三句话作为建立自然数集合的公理).

引入谓词 $\mathrm{E}(x,y)$ 表示 $x=y$,函数 $f(x)$ 表示个体 x 的相继后元,即 $f(x)=x+1$. 函数 $g(x)$ 表示个体 x 的相继前元,即 $g(x)=x-1$.

对语句 1 需注意唯一性的描述,常用的办法是如果有两个则它们必相等.即若对每个 x 都存在 y,y 是 x 的相继后元,且对任一 z,如果它也是 x 的相继后元,那么 y、z 必相等. 于是对语句 1 存在唯一性的描述为

$(\forall x)(\exists y)(\mathrm{E}(y,f(x))\wedge(\forall z)(\mathrm{E}(z,f(x))\rightarrow\mathrm{E}(y,z)))$

对语句 3 需注意的是对"除 0 而外"的描述,可理解为如果 $x\neq0$,则……的形式,于是语句 3 可描述为

$(\forall x)(\neg\mathrm{E}(x,0)\rightarrow(\exists y)(\mathrm{E}(y,g(x))\wedge(\forall z)(\mathrm{E}(z,g(x))\rightarrow\mathrm{E}(y,z))))$

语句 2 的描述是简单的,可写成

$$\neg(\exists x)\mathrm{E}(0,f(x))$$

4.4.6 "至少有一偶数是素数"与"至少有一偶数并且至少有一素数"的形式化

需注意两者的区别,分别形式描述为

$$(\exists x)(A(x)\wedge B(x))\text{与}(\exists x)A(x)\wedge(\exists x)B(x)$$

这两个逻辑公式并不等值.

同样,"一切事物它或是生物或是非生物"与"或者一切事物都是生物,或者一切事物都是非生物"的形式化也是不同的,可分别形式描述为

$(\forall x)(A(x)\vee B(x))$ 与 $(\forall x)A(x)\vee(\forall x)B(x)$,这两个逻辑公式也不等值.

理解为对一切 x 和一切 y 都有关系 P，或说对一切 x 一切 y，$P(x,y)$ 都成立. 当且仅当对一切的 $x\in D$，$y\in D$，$P(x,y)$ 均为真时，$(\forall x)(\forall y)P(x,y)$ 值为真. 显然，

$$(\forall x)(\forall y)P(x,y)=(\forall y)(\forall x)P(x,y)$$

(2) $(\forall x)(\exists y)P(x,y)=(\forall x)((\exists y)P(x,y))$

理解为对一切 x，都有 y 具有关系 P，或说对一切 x 都可找到 y 使 $P(x,y)$ 成立. 需注意的是 $(\forall x)(\exists y)$ 的次序是不可交换的.

如 $P(x,y)$ 表 $x-y=0$，论域 D 为实数. 这时：

对 $x_1\in D$，有 $y_1\in D$ 使 $x_1-y_1=0$.

对 $x_2\in D$，有 $y_2\in D$ 使 $x_2-y_2=0$.

……

从而 $(\forall x)(\exists y)P(x,y)=\mathrm{T}$. 这里对 x_1 有 y_1，对 x_2 有 y_2，…. 并不要求 $y_1=y_2=\cdots$.

(3) $(\exists x)(\forall y)P(x,y)=(\exists x)((\forall y)P(x,y))$

理解为有一个 x，对所有的 y 有关系 P. 显然这与 $(\forall y)(\exists x)P(x,y)$ 是不同的.

如 $P(x,y)$ 表 $x\cdot y=0$，论域为实数. 取 $x=0$ 时，对所有的 y 均有 $x\cdot y=0$ 成立，从而有 $(\exists x)(\forall y)P(x,y)=\mathrm{T}$.

(4) $(\exists x)(\exists y)P(x,y)=(\exists x)((\exists y)P(x,y))$

理解为有一个 x，有一个 y 具有关系 P. 显然 $(\exists x)(\exists y)P(x,y)=(\exists y)(\exists x)P(x,y)$.

对更多个量词的情形可同样分析.

这一节介绍了一些具体语句的形式化，都具有一般性，特别是对“所有的……都是……”，“有的……是……”的形式描述是最基本的格式.

通过这些例子，也可看出谓词逻辑的广泛的表达能力.

4.5 有限域下公式 $(\forall x)P(x)$，$(\exists x)P(x)$ 的表示法

我们曾约定个体变元的论域是包含一切事物的集合，由于论域的无限性，给公式真值的讨论带来了复杂性. 今将论域限定为有限集，为方便又不失一般性，用 $\{1,2,\cdots,k\}$ 来代表，这时来重新认识一下全称量词和存在量词.

4.5.1 论域为有限域时的公式表示法

$(\forall x)P(x)=P(1)\wedge P(2)\wedge\cdots\wedge P(k)$

$(\exists x)P(x)=P(1)\vee P(2)\vee\cdots\vee P(k)$

按定义 $(\forall x)P(x)$ 就是一切 x 都具有性质 P，或说对一切 x，$P(x)$ 都成立. 论域

$$D=\{1,2,\cdots,k\}$$

时，就是说 $P(1)$，$P(2)$，…，$P(k)$ 都成立，自然有

$$(\forall x)P(x)=P(1)\wedge P(2)\wedge\cdots\wedge P(k)$$

也就是说，全称量词 $\forall$ 乃是合取词 $\wedge$ 的推广. 有限域下，$(\forall x)P(x)$ 就化成了由合取词描述的命题逻辑的公式. 在任意域下，全称量词的作用“相当于”无限个合取词的作用.

按定义 $(\exists x)P(x)$ 就是至少有一个 x 具有性质 P，或说有一个 x，使 $P(x)$ 成立. 在论域

为 D_1 时，就是说 $P(1)$，或 $P(2)$，或……，或 $P(k)$ 成立，自然有

$$(\exists x)\ P(x)=P(1)\vee P(2)\vee\cdots\vee P(k)$$

也就是说，存在量词$\exists$乃是析取词$\vee$的推广. 有限域下，$(\exists x)P(x)$就化成了由析取词描述的命题逻辑的公式. 在任意域下，存在量词的作用"相当于"无限个析取词的作用.

严格地说，在无穷集$\{1,2,\cdots,k,\cdots\}$上

$$P(1)\wedge P(2)\wedge\cdots\wedge P(k)\wedge\cdots$$

$$P(1)\vee P(2)\vee\cdots\vee P(k)\vee\cdots$$

都是没有定义的，不是合式公式. 一般地说，谓词逻辑的公式不能转换为命题逻辑公式.

4.5.2 在域$\{1,2\}$上多次量化公式

$$\begin{aligned}
(\forall x)(\forall y)P(x,y)&=(\forall y)P(1,y)\wedge(\forall y)P(2,y)\\
&=P(1,1)\wedge P(1,2)\wedge P(2,1)\wedge P(2,2)\\
(\exists x)(\forall y)P(x,y)&=(\forall y)P(1,y)\vee(\forall y)P(2,y)\\
&=(P(1,1)\wedge P(1,2))\vee(P(2,1)\wedge P(2,2))\\
(\forall y)(\exists x)P(x,y)&=(\exists x)P(x,1)\wedge(\exists x)P(x,2)\\
&=(P(1,1)\vee P(2,1))\wedge(P(1,2)\vee P(2,2))\\
(\exists x)(\exists y)P(x,y)&=(\exists y)P(1,y)\vee(\exists y)P(2,y)\\
&=(P(1,1)\vee P(1,2))\vee(P(2,1)\vee P(2,2))
\end{aligned}$$

从这里可明显地看出$(\exists x)(\forall y)P(x,y)$与$(\forall y)(\exists x)P(x,y)$的不同. 若将$(\forall y)(\exists x)P(x,y)$写成析取范式，便知

$$\begin{aligned}
(\forall y)(\exists x)P(x,y)&=(P(1,1)\wedge P(1,2))\vee(P(2,1)\wedge P(2,2))\vee(P(1,1)\\
&\quad\wedge P(2,2))\vee(P(2,1)\wedge P(1,2))\\
&=(\exists x)(\forall y)P(x,y)\vee(P(1,1)\wedge P(2,2))\vee(P(2,1)\wedge P(1,2))
\end{aligned}$$

从而有

$$(\exists x)(\forall y)P(x,y)\Rightarrow(\forall y)(\exists x)P(x,y)$$

对有的谓词公式难于理解时，可在有限域$\{1,2\}$上转换成命题逻辑公式做些分析，常会帮助理解.

4.5.3 $\{1,2\}$域上谓词公式的解释

谓词逻辑里公式的一个解释，比命题逻辑要复杂得多. 在已知的论域下，需对公式中所含的命题变项、自由个体变项、谓词变项以及函数给出一个具体的设定才构成该公式的一个解释 I，在 I 下该公式有确定的真值. 下面在论域$\{1,2\}$上讨论.

对公式 $(\forall x)P(x)$的一个解释：

I：$P(1)=\mathrm{T}$，$P(2)=\mathrm{F}$

在这解释下，$(\forall x)P(x)=\mathrm{F}$.

对公式$(\forall x)(\exists y)P(x,y)$的一个解释：

I：$P(1,1)=\mathrm{T}$，$P(1,2)=\mathrm{F}$，

$P(2,1)=F, P(2,2)=T$.

在这解释下，$(\forall x)(\exists y)P(x,y)=T$. 因为对 $x=1$ 有 $P(1,1)=T$，对 $x=2$ 有 $P(2,2)=T$.

对公式 $(\forall x)(P(x)\to Q(f(x),a))$的一个解释：

I：$f(1)=2$，$f(2)=1$，$a=1$

$P(1)=F$，$P(2)=T$

$Q(1,1)=T$，$Q(1,2)=T$，$Q(2,1)=F$，$Q(2,2)=T$

在这解释下，$(\forall x)(P(x)\to Q(f(x),a))=T$. 因为

$x=1$ 时，$P(1)\to Q(f(1),1)=T$

$x=2$ 时，$P(2)\to Q(f(2),1)=T$

不难看出，在一般的论域 D 上，一个谓词公式解释的个数是无限的，而且每个解释本身需设定的内容也可理解为是无限的，包括对 $P(1),P(2),\cdots,f(1),f(2),\cdots$的设定.

4.6 公式的普遍有效性和判定问题

谓词逻辑公式也可分为三类，一是普遍有效公式、二是可满足公式、三是不可满足公式. 它们的定义依赖于谓词公式的解释.

在论域确定之后，一个谓词公式的解释，包括对谓词变项、命题变项、函数和自由个体的具体设定.

判别一个公式的普遍有效性问题就是判定问题.

4.6.1 普遍有效的公式

对一个谓词公式来说，如果在它的任一解释 I 下真值都为真，便称作普遍有效的.

如 $(\forall x)(P(x)\vee\neg P(x))$

$(\forall x)P(x)\to P(y)$（y 是 x 个体域中的一个元素）.

$(\forall x)P(x)\vee(\forall x)Q(x)\to(\forall x)(P(x)\vee Q(x))$

都是普遍有效的公式.

前两个公式的普遍有效性容易看出，仅就第三个作些说明. 不难看出，在该公式的任一解释（对 $P(x),Q(x)$的设定）下，若

$$(\forall x)P(x)\vee(\forall x)Q(x)=T$$

必有

$$(\forall x)(P(x)\vee Q(x))=T$$

从而$(\forall x)P(x)\vee(\forall x)Q(x)\to(\forall x)(P(x)\vee Q(x))$必总为真.

对一个谓词公式来说，如果在它的某个解释 I 下真值为真，便称作可满足的.

如$(\forall x)P(x)$，$(\exists x)P(x)$都是可满足的. 当取 $P(x)$表“x 是运动的”（一个解释）时，便有$(\forall x)P(x)=T$. 当取 $P(x)$表“x 是学生”（一个解释）时，便有$(\exists x)P(x)=T$. 从而它们都是可满足的公式.

对一个谓词公式来说，如果在它的任一解释 I 下真值均为假，便称作不可满足的.

如 $$(\exists x)(P(x)\wedge\neg P(x))$$
$$(\forall x)P(x)\wedge(\exists y)\neg P(y)$$
都是不可满足的.

若一个公式是普遍有效的,那么这公式的否定就是不可满足的,反过来也成立.

有限域上一个公式的可满足性和普遍有效性依赖于个体域个体的个数且仅依赖于个体域个体的数目.即在某个含 k 个元素的 k 个体域上普遍有效(或可满足),则在任一 k 个体域上也普遍有效(或可满足).

如果某公式在 k 个体域上普遍有效,则在 $k-1$ 个体域上也普遍有效.

如果某公式在 k 个体域上可满足,则在 $k+1$ 个体域上也可满足.

4.6.2 判定问题

谓词逻辑的判定问题,指的是任一公式的普遍有效性.若说谓词逻辑是可判定的,就要求给出一个能行的方法,使得对任一谓词公式都能判断是否是普遍有效的.所谓能行的方法乃是一个机械方法,可一步一步做下去,并在有穷步内实现判断.一般地说,像数学定理的证明不是能行的,因为没有一个机械方法实现对任一数学定理的证明,而是针对不同问题靠人的智慧技巧去解决.当然像线性方程组的求解,是有能行方法的.能行可判定问题关系着找出能行的方法,从而推进有关方法的研究.普遍有效性的判定,关系着推理形式的正确与否,关系着公理系统的一致性等,所以是个重要课题.

(1) 谓词逻辑是不可判定的.

对任一谓词公式而言,没有能行方法判明它是否是普遍有效的.

然而这并不排除谓词公式有子类是可判定的.像命题逻辑就可用真值表法判明任一命题公式的永真性.判定问题的困难在于个体域是个无穷集以及对谓词设定的任意性.

(2) 只含有一元谓词变项的公式是可判定的.

(3) $$(\forall x_1)\cdots(\forall x_n)P(x_1,\cdots,x_n)$$
和 $$(\exists x_1)\cdots(\exists x_n)P(x_1,\cdots,x_n)$$
型公式,若 P 中无量词和其他自由变项时也是可判定的.

(4) 个体域有穷时的谓词公式是可判定的.