第一章　基本概念

1.1　图的概念

世界上许多事物以及它们之间的联系都可以用图形直观地表示。这时人们往往用结点表示事物，用边表示它们之间的联系。这种由结点和边构成的图形就是图论所研究的对象。

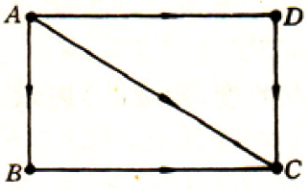


图　1.1

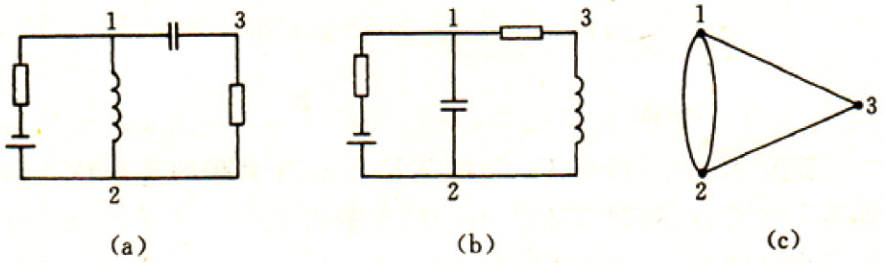


图　1.2

例 1.1.1　A、B、C、D 4 个队进行循环赛。为了解当前各队的胜负情况，可以用结点表示队，用有向边(u,v)表示 u 队胜 v 队。例如图 1.1 表示 A 胜 B、C、D；B 胜 C；D 胜 C，而 B 和 D 之间还没有比赛。

例 1.1.2　两个直流电路如图 1.2(a)(b)。基尔霍夫定律指出：电路特性只与电路网络的拓扑性质有关，而与支路元件的特性无关。因此都可以将它们转化为图 1.2(c)进行研究。

例 1.1.3　人们常用框图的形式来帮助编写或描述程序。当需要对程序进行分析时，也往往用结点表示程序框，用有向边表示它们之间的顺序关系，如图 1.3。

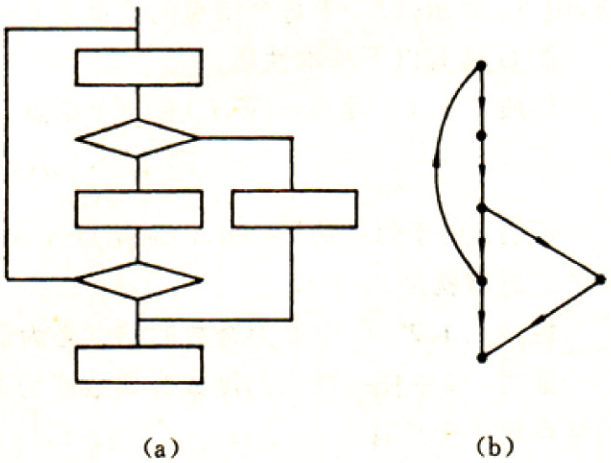


图　1.3

定义 1.1.1　二元组$(V(G),E(G))$称为图。其中 $V(G)$是非空集合，称为结点集，$E(G)$是 $V(G)$诸结点之间边的集合。常用 $G=(V,E)$表示图。

图可以分为有限图与无限图两类。本书只讨论有限图，即 V 和 E 都是有限集。给定某个图 $G=(V,E)$，如果不加特殊说明，就认为 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，$E=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$，即结点数$|v|=n$，边数$|E|=m$。

图 G 的边可以是有方向的，也可以是无方向的。它们分称为有向边(或弧)和无向边，用 $e_k=(v_i,v_j)$表之。这时我们说 v_i 与 v_j 是相邻结点；e_k 分别与 v_i，v_j 相关联。如果

e_k 是有向边，称 v_i 是 e_k 的始点，v_j 是 e_k 的终点；并称 v_i 是 v_j 的直接前趋，v_j 是 v_i 的直接后继。如果 e_k 是无向边，则称 v_i, v_j 是 e_k 的两个端点。全部由有向边构成的图叫有向图；只由无向边组成的图叫无向图；既有有向边又有无向边构成的图称为混合图。例如图 1.4(a)是有向图，(b)是无向图，(c)是混合图。在图 G 中，只与一个结点相关联的边称为自环，在同一对结点之间可以存在多条边，称之为重边。含有重边的图叫多重图。比如图 1.4(a)(b)中 a_4, e_4 分别是自环，a_1, a_2 和 e_1, e_2, e_3 分别是重边。

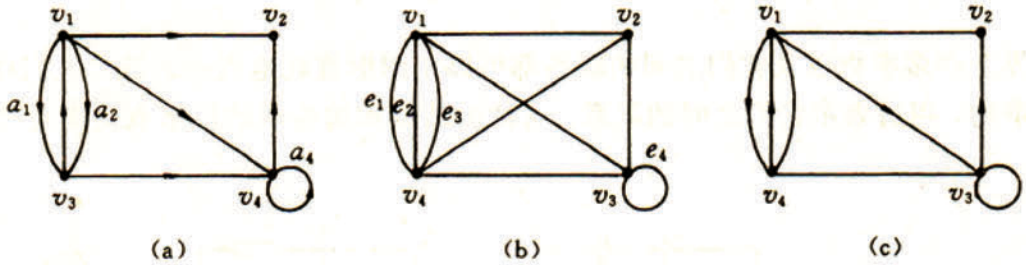


图 1.4

定义 1.1.2 $G=(V,E)$ 的某结点 v 所关联的边数称为该结点的度，用 $d(v)$ 表示。如果 v 带有自环，则自环对 $d(v)$ 的贡献为 2。

例如图 1.4(a)中，$d(v_1)=5$，$d(v_2)=2$，$d(v_3)=5$，$d(v_4)=4$。(b)中，$d(v_1)=5$，$d(v_2)=3$，$d(v_3)=5$，$d(v_4)=5$。有向图中由于各边都是有向边，因此每个结点 v 还有其正度($d^+(v)$)和负度($d^-(v)$)。$d^+(v)$ 的值是以 v 为始点的边的数目，$d^-(v)$ 是以 v 为终点的边的数目。显然有 $d^+(v)+d^-(v)=d(v)$。

定义 1.1.3 任意两结点间最多只有一条边，且不存在自环的无向图称为简单图。

以下所说的图在不加说明的情况下指的是无向图。

没有任何边的简单图叫空图，用 N_n 表示；任何两结点间都有边的简单图称为完全图，用 K_n 表示。K_n 中每个结点的度都是 $n-1$。

图 G 具有以下基本性质。

性质 1.1.1 设 $G=(V,E)$ 有 n 个结点，m 条边，则

$$\sum_{v\in V(G)} d(v) = 2m。$$

证明：由于每条边 $e=(u,v)$ 对结点 u 和 v 度的贡献各为 1，因此 m 条边对全部结点度的总贡献就是 $2m$。

性质 1.1.2 G 中度为奇数的结点必为偶数个。

证明：G 中任一结点的度或为偶数或为奇数，设 V_e 是度为偶的结点集，V_o 是度为奇的结点集。于是有

$$\sum_{v\in V_e} d(v) + \sum_{v\in V_o} d(v) = 2m,$$

因此 $\sum_{v\in V_o} d(v)$ 为偶数，即 V_o 中含有偶数个结点。

性质 1.1.3 有向图 G 中正度之和等于负度之和。

这是因为每条边对结点的正、负度贡献各为 1。

性质 1.1.4 K_n 的边数是 $\frac{1}{2}n(n-1)$。

证明：K_n 中各结点的度都是 $(n-1)$，由性质 1.1.1 即得。

性质 1.1.5 非空简单图 G 中一定存在度相同的结点。

证明：设 G 中不存在孤立结点，则对 n 个结点的简单图，每个结点度 $d(v)$ 的取值范围是 $1\sim(n-1)$，由抽屉原理，一定存在两个度相同的结点。若存在一个孤立结点，亦类似可证。

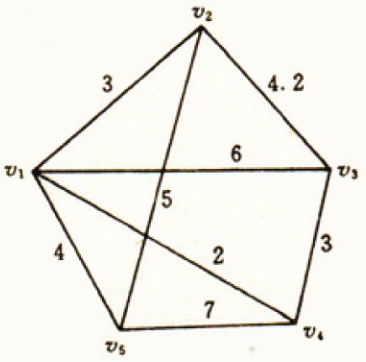


图 1.5

定义 1.1.4 如果图 $G=(V,E)$ 的每条边 $e_k=(v_i,v_j)$ 都赋以一个实数 w_k 作为该边的权，则称 G 是赋权图。特别地，如果这些权都是正实数，就称 G 是正权图。

图 1.5 就是一个正权图。权可以表示该边的长度，时间，费用或容量等。

定义 1.1.5 给定 $G=(V,E)$，如果存在另一个图 $G'=(V',E')$，满足 $V'\subseteq V$，$E'\subseteq E$，则称 G' 是 G 的一个子图。特别地，如果 $V'=V$，就称 G' 是 G 的支撑子图或生成子图；如果 $V'\subseteq V$，且 E' 包含了 G 在结点子集 V' 之间的所有边，则称 G' 是 G 的导出子图。

例如，图 1.6 中的 G_1 和 G_2 分别是 G 的支撑子图和导出子图，G_3 是 G 的子图。按照子图的定义，显然 G 也是它自身的子图，而且既是支撑子图，也是导出子图；空图也是 G 的子图，而且是支撑子图。它们都称为平凡子图。

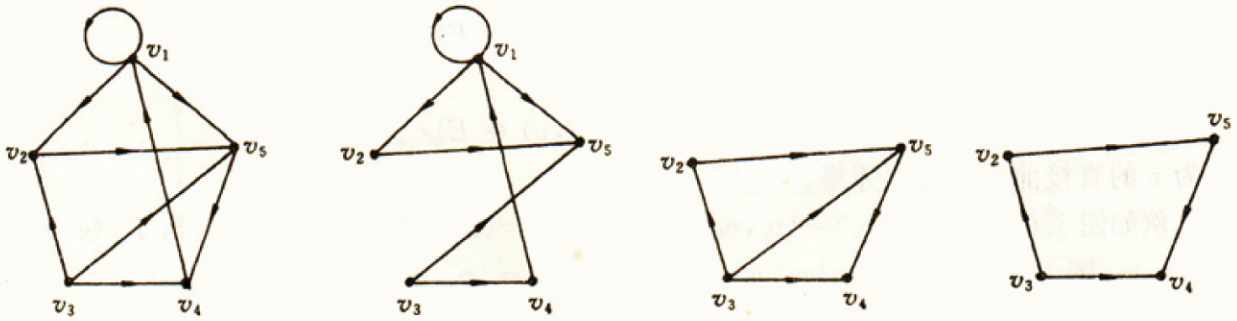


图 1.6

定义 1.1.6 给定两个图 $G_1=(V_1,E_1)$，$G_2=(V_2,E_2)$。令 $G_1\cup G_2=(V,E)$，其中 $V=V_1\cup V_2$，$E=E_1\cup E_2$，$G_1\cap G_2=(V,E)$，其中 $V=V_1\cap V_2$，$E=E_1\cap E_2$，$G_1\oplus G_2=(V,E)$，其中 $V=V_1\cup V_2$，$E=E_1\oplus E_2$，分别称为 G_1 和 G_2 的并、交和对称差。

例如图 1.7 中 G_1 和 G_2 的并、交、对称差分别是(a)、(b)和(c)。

在 G 中删去一个子图 H，指删掉 H 中的各条边，记作 $G-H$，特别地，对于简单图 G，称 K_n-G 为 G 的补图，记作 $\overline{G}$。例如图 1.7 中 G_1 的补图是(d)。从 G 中删去某个结点 v 及其关联的边所得到的图记作 $G-v$。从 G 中删去某条特定的边 $e=(u,v)$，记作 $G-e$。例如图 1.6 中 $G-v_1=G_2$，$G_2-(v_3,v_5)=G_3$。显见 $G-v$ 是 G 的导出子图，而 $G-e$ 是 G 的支撑子图。如果在 G 中增加某条边 e_{ij}，可记作 $G+e_{ij}$，例如 $G_3+(v_3,v_5)=G_2$。

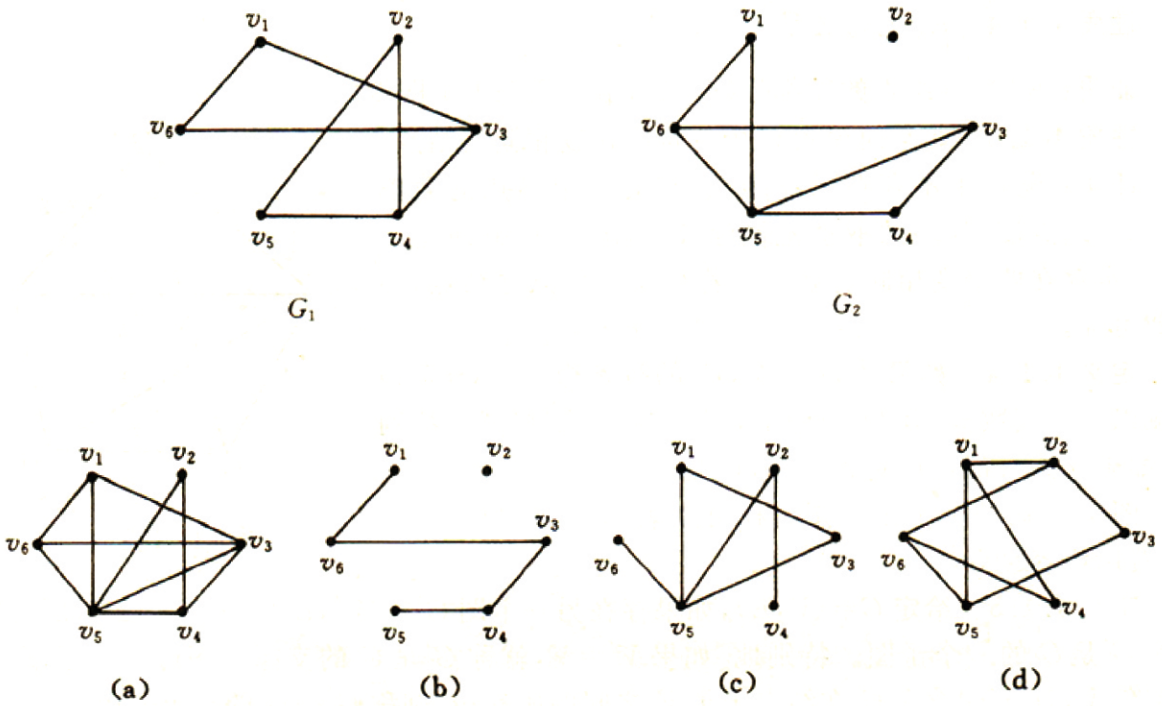


图 1.7

如果 G 是无向图，则 $\Gamma(v)=\{u|(v,u)\in E\}$ 称为 v 的邻点集。

定义 1.1.7 设 v 是有向图 G 的一个结点，则

$$\Gamma^{+}(v)=\{u\mid(v,u)\in E\}$$

称为 v 的直接后继集或外邻集；相应地

$$\Gamma^{-}(v)=\{u\mid(u,v)\in E\}$$

称为 v 的直接前趋集或内邻集。

例如图 1.6(a)的 $\Gamma^{+}(v_1)=\{v_1,v_2,v_5\}$，$\Gamma^{+}(v_2)=\{v_5\}$；$\Gamma^{-}(v_1)=\{v_1,v_4\}$，$\Gamma^{-}(v_2)=\{v_1,v_3\}$。图 1.5 中，$\Gamma(v_1)=\{v_2,v_3,v_4,v_5\}$，$\Gamma(v_2)=\{v_1,v_3,v_5\}$。

给定了结点数目及它们之间的相邻关系，便很容易画出图 G，不过它的形状不是唯一的。这种形状不同但结构相同的图叫做同构。

定义 1.1.8 两个图 $G_1=(V_1,E_1)$，$G_2=(V_2,E_2)$，如果 V_1 和 V_2 之间存在双射 f，而且 $(u,v)\in E_1$，当且仅当 $(f(u),f(v))\in E_2$ 时，称 G_1 和 G_2 同构。记作 $G_1\cong G_2$。

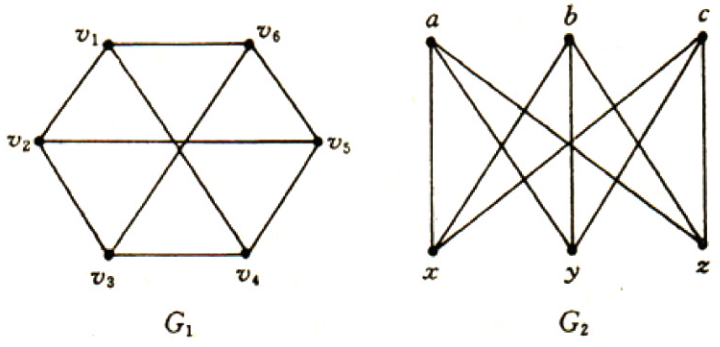


图 1.8

例 1.1.4 图 1.8 的 G_1 和 G_2 是同构的。因为设 $f(v_1)=a$，$f(v_2)=x$，$f(v_3)=b$，$f(v_4)=y$，$f(v_5)=c$，$f(v_6)=z$ 时，对任意 $e=(u,v)\in E_1$，都有 $e'=(f(u),f(v))\in E_2$，反之亦然，即

$$(v_1,v_2)\in E_1\leftrightarrow(f(v_1),\quad f(v_2))=(a,x)\in E_2,$$

$(v_1,v_4)\in E_1\leftrightarrow(f(v_1),\quad f(v_2))=(a,y)\in E_2$,

$(v_1,v_6)\in E_1\leftrightarrow(f(v_1),\quad f(v_2))=(a,z)\in E_2$,

$(v_2,v_3)\in E_1\leftrightarrow(f(v_2),\quad f(v_3))=(x,b)\in E_2$,

$(v_2,v_5)\in E_1\leftrightarrow(f(v_2),\quad f(v_5))=(x,c)\in E_2$,

$(v_3,v_4)\in E_1\leftrightarrow(f(v_3),\quad f(v_4))=(b,y)\in E_2$,

$(v_3,v_6)\in E_1\leftrightarrow(f(v_3),\quad f(v_6))=(b,z)\in E_2$,

$(v_4,v_5)\in E_1\leftrightarrow(f(v_4),\quad f(v_5))=(y,c)\in E_2$,

$(v_5,v_6)\in E_1\leftrightarrow(f(v_5),\quad f(v_6))=(c,z)\in E_2$,

从定义可知，如若 $G_1\cong G_2$，必须满足。

(1) $|V(G_1)|=|V(G_2)|$，　$|E(G_1)|=|E(G_2)|$。

(2) G_1 和 G_2 结点度的非增序列相同。

(3) 存在同构的导出子图。

其中(3)对判定两个图不同构有时十分有效。例如图 1.9 G_2 的结点集$\{a,b,c,d,e,f\}$所成的导出子图中有 2 个相邻的度为 3 的结点，其余结点的度均为 2。而 G_1 中却没有与之同构的导出子图，因此 G_1 与 G_2 不同构。

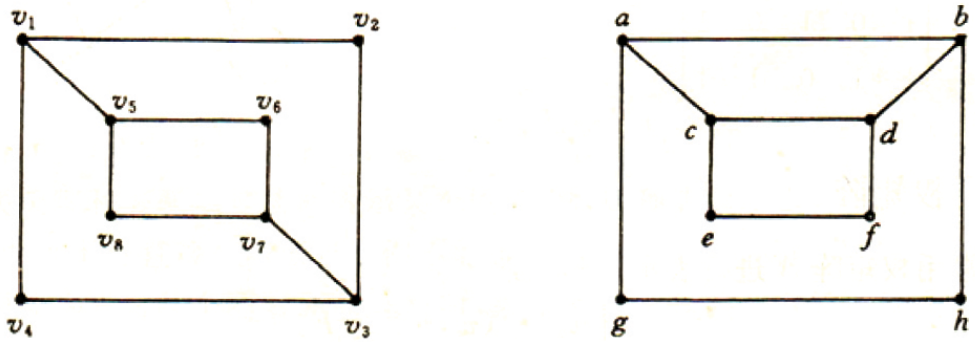


图　1.9