第二章　道路与回路

2.1　道路与回路

定义 2.1.1　有向图 $G=(V,E)$ 中，若边序列 $P=(e_{i1},e_{i2},\cdots,e_{iq})$，其中 $e_{ik}=(v_l,v_j)$ 满足 v_l 是 e_{ik-1} 的终点，v_j 是 e_{ik+1} 的始点，就称 P 是 G 的一条有向道路。如果 e_{iq} 的终点也是 e_{i1} 的始点，则称 P 是 G 的一条有向回路。

如果 P 中的边没有重复出现，则分别称为简单有向道路和简单有向回路。进而，如果在 P 中结点也不重复出现，又分别称它们是初级有向道路和初级有向回路简称为路和回路。显然，初级有向道路(回路)一定是简单有向道路(回路)。

例 2.1.1　图 2.1 中，边序列 (e_5,e_4,e_5,e_7) 是有向道路，(e_5,e_4,e_5,e_7,e_3) 是有向回路。(e_5,e_4,e_1,e_2) 是简单有向道路，(e_5,e_4,e_1,e_2,e_3) 是简单有向回路。(e_1,e_2) 是初级有向道路，(e_1,e_2,e_3) 是初级有向回路。

定义 2.1.2　无向图 $G=(V,E)$ 中，若点边交替序列 $P=(v_{i1},e_{i1},v_{i2},e_{i2},\cdots,e_{iq-1},v_{iq})$ 满足 v_{ik},v_{ik+1} 是 e_{ik} 的两个端点，则称 P 是 G 中的一条链，或道路。如果 $v_{iq}=v_{i1}$，则称 P 是 G 中的一个圈，或回路。

如果 P 中没有重复出现的边，称之为简单道路或简单回路，若其中结点也不重复，又称之为初级道路或初级回路。

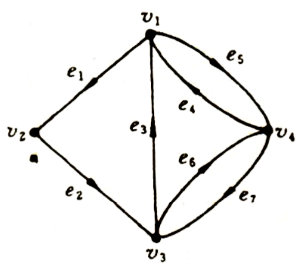


图　2.1

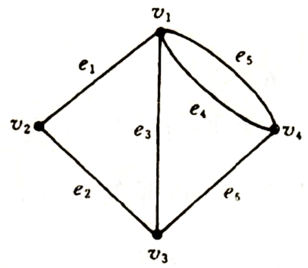


图　2.2

例 2.1.2　图 2.2 中边序列 (e_4,e_5,e_4,e_6) 是道路，(e_4,e_5,e_4,e_6,e_3) 是回路；(e_4,e_5,e_1,e_2) 是简单道路，(e_4,e_5,e_1,e_2,e_3) 是简单回路；(e_1,e_2) 是初级道路，(e_1,e_2,e_3) 是初级回路。

例 2.1.3　设 C 是简单图 G 中含结点数大于 3 的一个初级回路，如果结点 v_i 和 v_j 在 C 中不相邻，而边 $(v_i,v_j)\in E(G)$，则称 (v_i,v_j) 是 C 的一条弦。若对每一个 $v_k\in V(G)$，都有 $d(v_k)\geqslant 3$，则 G 中必含带弦的回路。

证明：在 G 中构造一条极长的初级道路 $P=(e_{i1},e_{i2},\cdots,e_{il})$，不妨设 $e_{i1}=(v_0,v_1)$，$e_{il}=(v_{l-1},v_l)$。由于 P 是极长的初级道路，所以 v_0 和 v_l 的邻接点都在该道路 P 上。由已知条件，$d(v_0)\geqslant 3$，不妨设 $\Gamma(v_0)=\{v_1,v_{ij},v_{ik},\cdots\}$。其中 $1<j<k$，这时 $(v_0,v_1,\cdots,v_{ik},v_0)$ 是一条初级回路，而 (v_0,v_{ij}) 就是该回路中的一条弦。

例 2.1.4 设 $G=(V,E)$ 是无向图，如果 $V(G)$ 可以划分为子集 X 和 Y，使得对所有的 $e=(u,v)\in E(G)$，u 和 v 都分属于 X 或 Y，则称 G 是二分图。证明：如果二分图 G 中存在回路，则它们都是由偶数条边组成的。

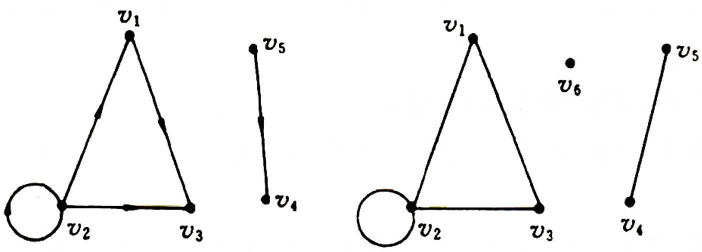
证明：设 C 是二分图 G 的任一回路，不妨设 $v_0\in X$ 是 C 的始点，由于 G 是二分图，所以沿回路 C 必须经过偶数条边才能达到某结点 $v_i\in X$，因而只有经过偶数边才能回到 v_0。

定义 2.1.3 设 G 是无向图，若 G 的任意两结点之间都存在道路，就称 G 是连通图，否则称为非连通图。

如果 G 是有向图，不考虑其边的方向，即视之为无向图，若它是连通的，则称 G 是连通图。

若连通子图 H 不是 G 的任何连通子图的真子图，则称 H 是 G 的极大连通子图，或称连通支。显然 G 的每个连通支都是它的导出子图。

例 2.1.5 图 2.1 和图 2.2 都是连通图，图 2.3 是非连通图。其中(a)有两个连通支，它们的结点集分别是 $\{v_1,v_2,v_3\}$ 和 $\{v_4,v_5\}$，(b)有三个连通支，其结点集是 $\{v_1,v_2,v_3\}$，$\{v_4,v_5\}$ 和 $\{v_6\}$。



(a) (b)

图 2.3

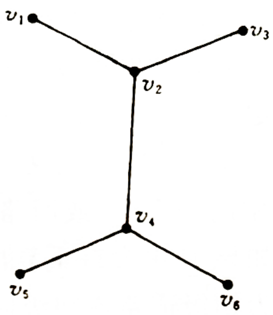


图 2.4

例 2.1.6 图 2.4 是连通图，它不含回路，而且在任意两结点之间都只有唯一的一条初级道路。这种图称为树，它是含边数最少的连通图。

例 2.1.7 设 G 是简单图，证明当 $m>\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ 时，G 是连通图。

证明：假定 G 是非连通图，则至少含有 2 个连通支。设分别为 $G_1=(V_1,E_1)$，$G_2=(V_2,E_2)$。其中 $|V_1(G_1)|=n_1$，$|V_2(G_2)|=n_2$。$n_1+n_2=n$。由于 G 是简单图，因此

$$|E_1(G_1)|\leqslant\frac{1}{2}n_1(n_1-1),$$

$$|E_2(G_2)|\leqslant\frac{1}{2}n_2(n_2-1),$$

$$m\leqslant\frac{1}{2}n_1(n_1-1)+\frac{1}{2}n_2(n_2-1).$$

由于 $n_1\leqslant n-1$，$n_2\leqslant n-1$，

所以
$$m\leqslant\frac{1}{2}(n-1)(n_1-1+n_2-1)$$
$$=\frac{1}{2}(n-1)(n-2),$$ 与已知条件矛盾，故 G 是连通图。

2.3 欧拉道路与回路

1736 年瑞士著名数学家欧拉(Leonhard Euler)发表了图论的第一篇论文"哥尼斯堡七桥问题"。这个问题是这样的:哥尼斯堡城被 Pregel 河分成了 4 部分,它们之间有 7 座桥。如图 2.8 所示。当时人们提出了一个问题,能否从城市的某处出发,过每座桥一次且仅一次最后回到原处。欧拉的文章漂亮地解决了这个问题。他把 4 块陆地设想为 4 个结点,分别用 A、B、C、D 表示,而将桥画成相应的边,如图 2.9。于是问题转化为在该图中是否存在经过每条边一次且仅一次的回路。欧拉的论文给出了解决这类问题的准则,并对七桥问题给出了否定的结论。

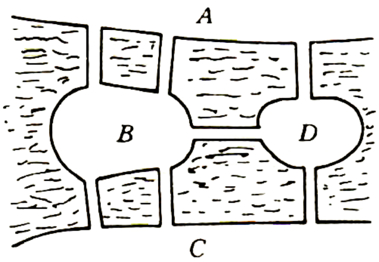


图 2.8

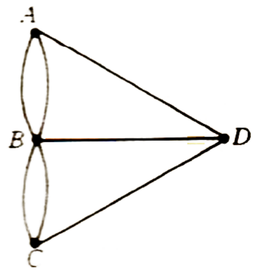


图 2.9

定义 2.3.1 无向连通图 $G=(V,E)$ 中的一条经过所有边的简单回路(道路)称为 G 的欧拉回路(道路)。

定理 2.3.1 无向连通图 G 存在欧拉回路的充要条件是 G 中各结点的度都是偶数。

证明:必要性。若 G 中有欧拉回路 C,则 C 过每一条边一次且仅一次。对任一结点 v 来说,如果 C 经由 e_i 进入 v,则一定通过另一条边 e_j 从 v 离开。因此结点 v 的度是偶数。

充分性。由于 G 是有穷图,因此可以断定,从 G 的任一结点 v_0 出发一定存在 G 的一条简单回路 C。这是因为各结点的度都是偶数,所以这条简单道路不可能停留在 v_0 以外的某个结点,而不能再向前伸延以致构成回路 C。

如果 $E(G)=C$,则 C 就是欧拉回路,充分性得证。否则在 G 中删去 C 的各边,得到 $G_1=G-C$。G_1 可能是非连通图,但每个结点的度保持为偶数。这时,G_1 中一定存在某个度非零的结点 v_i,同时 v_i 也是 C 中的结点。否则 C 的结点与 G_1 的结点之间无边相连,与 G 是连通图矛盾。同样理由,从 v_i 出发,G_1 中 v_i 所在的连通支内存在一条简单回路 C_1。显然 $C\cup C_1$ 仍然是 G 的一条简单回路,但它包括的边数比 C 多。继续以上构造方法,最终有简单回路 $C'=C\cup C_1\cup\cdots\cup C_k$,它包含了 G 的全部边,即 C' 是 G 的一条欧拉回路。

以上采用了构造性证明的方法,即证明过程本身就给出了问题求解的步骤。

例 2.3.1 试找出图 2.10 的一条欧拉回路。

解：从任一点，比如 v_1 开始，可构造简单回路 $C=(e_1,e_6,e_8,e_7,e_2)$。$G_1=G-C$ 中的 v_2,v_5 度非零且是 C 中的结点，从 v_2 开始 G_1 中有简单回路 $C_1=(e_3,e_5,e_4)$。因此 $C\cup C_1=(e_1,e_3,e_5,e_4,e_6,e_8,e_7,e_2)$包含了 G 的所有边，即是 G 的一条欧拉回路。

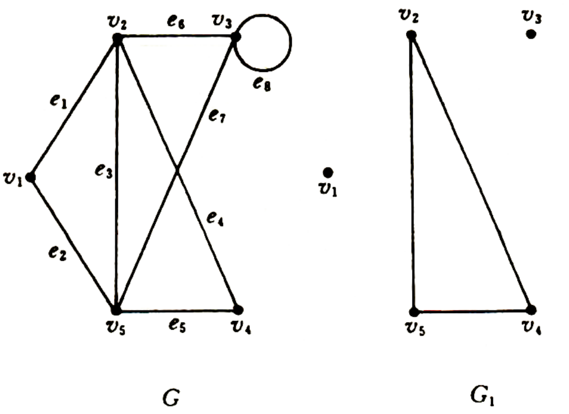


图　2.10

推论 2.3.1　若无向连通图 G 中只有 2 个度为奇的结点，则 G 存在欧拉道路。

证明：设 v_i 和 v_j 是两个度为奇数的结点。作 $G'=G+(v_i,v_j)$，则 G' 中各点的度都是偶数。由定理 2.3.1，G' 有欧拉回路，它包含边 (v_i,v_j)，删去该边，得到一条从 v_i 到 v_j 的简单道路，它恰好经过了 G 的所有边，亦即是一条欧拉道路。

推论 2.3.2　若有向连通图 G 中各结点的正、负度相等，则 G 存在有向欧拉回路。

其证明与定理 2.3.1 的证明相仿。

例 2.3.2　七桥问题中既不存在欧拉回路也不存在欧拉道路。

例 2.3.3　设连通图 $G=(V,E)$ 有 k 个度为奇数的结点，证明 $E(G)$ 可以划分成 $k/2$ 条简单道路。

证明：由性质 1.1.2，k 是偶数。在这 k 个结点间增添 $k/2$ 条边，使每个结点都与其中一条边关联，得到 G'，G' 中各结点的度都为偶数。由定理 2.3.1，G' 中有欧拉回路 C，这 $k/2$ 条边都在 C 上且不相邻接。删去这些边，得到 $k/2$ 条简单道路，它们包含了 G 的所有边。亦即 $E(G)$ 划分成了 $k/2$ 条简单道路。

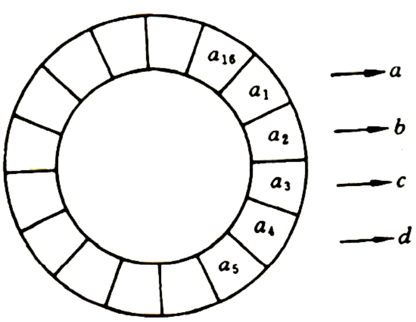


图　2.11

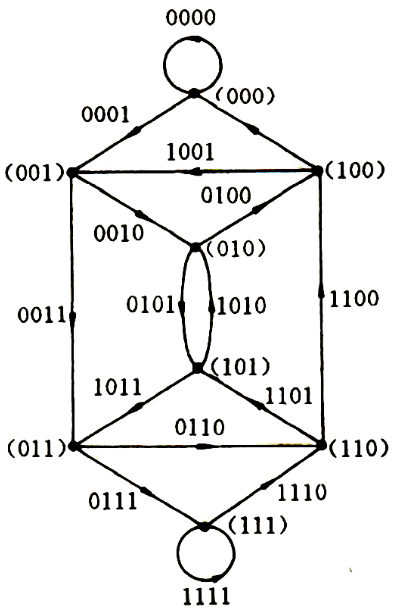


图　2.12

例 2.3.4　一个编码盘分成 16 个相等的扇面，每个扇面分别由绝缘体和导体组成，

可表示 0 和 1 两种状态，其中 a,b,c,d 四个位置的扇面组成一组二进制输出，如图 2.11 所示。试问这 16 个二进制数的序列应如何排列，才恰好能组成 0000 到 1111 的 16 组四位二进制输出，同时旋转一周后又返回到 0000 状态？

解：我们发现如果从状态 $a_1a_2a_3a_4$（$a_i=0$ 或 1）逆时针方向旋转一个扇面，那么新的输出是 $a_2a_3a_4a_5$，其中有三位数字不变。因此可以用 8 个结点表示从 000 到 111 这 8 个二进制数。这样从结点（$a_{i-1}\ a_i\ a_{i+1}$）可以到达结点（$a_i\ a_{i+1}$ 0）或（$a_i\ a_{i+1}$ 1），其输出分别为（$a_{i-1}\ a_i\ a_{i+1}$ 0）和（$a_{i-1}\ a_i\ a_{i+1}$ 1），这样可以得到图 2.12。它是有向连通图，共有 16 条边，且每结点的正、负度相等。由推论 2.3.2，它存在有向欧拉回路。其中任一条都是原问题的解，比如（0000101001101111）就是一种方案。

2.4 哈密顿道路与回路

19 世纪英国数学家哈密顿（Willian Hamilton）给出了关于一个凸 12 面体的数学游戏，他把 12 面体的 20 个顶点比作世界上 20 个城市，30 条棱表示这些城市之间的交通线路。如图 2.13 所示。哈密顿提出能否周游世界，即从某个城市出发，经过每城一次且只一次最后返回出发地。答案是显然的，比如图中的粗线边就表示了其中一种方案。

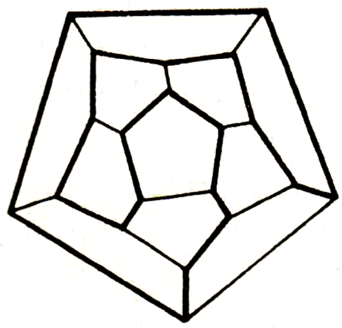


图 2.13

对于任何连通图都可以提出类似问题。

定义 2.4.1 无向图的一条过全部结点的初级回路（道路）称为 G 的哈密顿回路（道路），简记为 H 回路（道路）。

哈密顿回路是初级回路，是特殊的简单回路，因此它与欧拉回路的概念不同。当然在特殊情况下，G 的一条哈密顿回路恰好也是其欧拉回路。鉴于 H 回路是初级回路，所以如果 G 中含有重边或自环，删去它们之后得到简单图 G'，那么 G 和 G' 关于 H 回路（道路）的存在性是等价的。因此，判定 H 回路存在性问题一般都是针对简单图。

例 2.4.1 完全图 K_n（$n\geqslant 3$）中存在 H 回路。

例 2.4.2 图 2.10 的 G 中不存在 H 回路，但存在 H 道路。

有若干存在哈密顿回路（道路）的充分性定理。

定理 2.4.1 如果简单图 G 的任意两结点 v_i,v_j 之间恒有 $d(v_i)+d(v_j)\geqslant n-1$，则 G 中存在哈密顿道路。

证明：先证 G 是连通图。若 G 非连通，则至少分为 2 个连通支 H_1,H_2，其结点数分别为 n_1,n_2。从中各任取一个结点 v_i,v_j，则 $d(v_i)\leqslant n_1-1$，$d(v_j)\leqslant n_2-1$。故 $d(v_i)+d(v_j)<n-1$。矛盾。

以下证 G 存在 H 道路。设 $P=(v_{i_1},v_{i_2},\cdots,v_{i_l})$ 是 G 中一条极长的初级道路，即 v_{i_1} 和 v_{i_l} 的邻点都在 P 上。此时若 $l=n$，P 即为一条 H 道路。若 $l<n$，则可以证明 G 中一定存在经过结点 $v_{i_1},v_{i_2},\cdots,v_{i_l}$ 的初级回路。否则，若边 $(v_{i_1},v_{i_p})\in E(G)$，就不能有 $(v_{i_l},v_{i_{p-1}})\in E(G)$，不然删掉 $(v_{i_p},v_{i_{p-1}})$，就形成了一条过这 l 个结点的初级回路。于是，设

$d(v_{i_l})=k$，则 $d(v_{i_l})\leqslant l-k-1$，其中减去1表示不能与自身相邻。因此 $d(v_{i_1})+d(v_{i_l})<n-1$。与已知矛盾。所以存在经过 $v_{i_1},v_{i_2},\cdots,v_{i_l}$ 的初级回路C。

由于 G 连通，所以存在 C 之外的结点 v_t 与 C 中的某点 (v_{i_q}) 相邻。删去 $(v_{i_{q-1}},v_{i_q})$，则 $P'=(v_t,v_{i_q},\cdots,v_{i_{p-1}},v_{i_l},\cdots,v_{i_{q-1}})$ 是 G 中一条比 P 更长的初级道路。以 P' 的两个端点 v_t 和 $v_{i_{q-1}}$ 继续扩充，可得到一条新的极长的初级道路。重复上述过程，因为 G 是有穷图，所以最终得到的初级道路一定包含了 G 的全部结点，即是 H 道路。

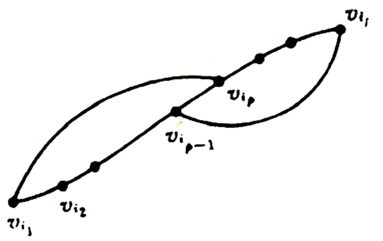


图 2.14

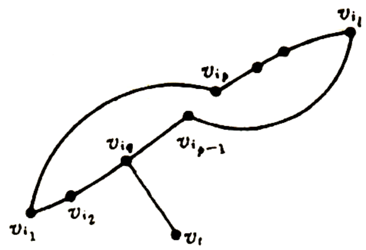


图 2.15

推论 2.4.1 若简单图 G 的任意两结点 v_i 和 v_j 之间恒有 $d(v_i)+d(v_j)\geqslant n$，则 G 中存在哈密顿回路。

证明：由定理2.4.1，G 有 H 道路。设其两端点是 v_1 和 v_n，若 G 不存在 H 回路，一定有 $d(v_1)+d(v_n)\leqslant n-1<n$，产生矛盾。

推论 2.4.2 若简单图 G 每个结点的度都大于等于 $\frac{n}{2}$，则 G 有 H 回路。

利用推论2.4.1即可得出结论。

以下介绍一个更强的 H 回路的存在性定理。

引理 2.4.1 设 G 是简单图，v_i，v_j 是不相邻结点，且满足 $d(v_i)+d(v_j)\geqslant n$。则 G 存在 H 回路的充要条件是 $G+(v_i,v_j)$ 有 H 回路。

证明：必要性显然。现证充分性。假定 G 不存在 H 回路，则 $G+(v_i,v_j)$ 的 H 回路一定经过边 (v_i,v_j)，删去 (v_i,v_j)，即 G 中存在一条以 v_i，v_j 为端点的 H 道路，这时又有 $d(v_i)+d(v_j)<n$。与已知矛盾。

定义 2.4.2 若 v_i 和 v_j 是简单图 G 的不相邻结点，且满足 $d(v_i)+d(v_j)\geqslant n$，则令 $G'=G+(v_i,v_j)$，对 G' 重复上述过程，直至不再有这样的结点对为止。最终得到的图称为 G 的闭合图，记作 $C(G)$。

例 2.4.3 图2.16(a)的闭合图是(b)。

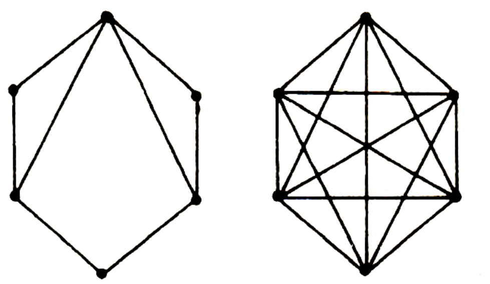

(a) (b)

图 2.16

引理 2.4.2 简单图 G 的闭合图 $C(G)$ 是唯一的。

证明：设 $C_1(G)$ 和 $C_2(G)$ 是 G 的两个闭合图，$L_1=\{e_1,e_2,\cdots,e_r\}$，$L_2=\{a_1,a_2,\cdots,a_s\}$ 分别是 $C_1(G)$ 和 $C_2(G)$ 中新加入边的集合，可以证明 $L_1=L_2$，即 $C_1(G)=C_2(G)$。如若不然，不

失一般性，设 $e_{i+1}=(u,v)\in L_1$ 是构造 $C_1(G)$ 时第一条不属于 L_2 的边，亦即 $e_{i+1}\notin C_2(G$
令 $H=G\cup\{e_1,e_2,\cdots,e_i\}$，这时 H 是 $C_1(G)$ 也是 $C_2(G)$ 的子图。由于构造 $C_1(G)$ 时要
入 e_{i+1}，显然 H 中满足 $d(u)+d(v)\geqslant n$，但 $(u,v)\notin C_2(G)$，与 $C_2(G)$ 是 G 的闭合图矛盾

定理 2.4.2 简单图 G 存在哈密顿回路的充要条件是其闭合图存在哈密顿回路。

证明：设 $C(G)=G\cup L_1$，$L_1=\{e_1,e_2,\cdots,e_t\}$，由引理 2.4.1 和引理 2.4.2，$G$ 有
回路$\Leftrightarrow G+e_1$ 有 H 回路$\Leftrightarrow\cdots\Leftrightarrow G\cup L_1$ 有 H 回路。由于 $C(G)$ 唯一，故定理得证。

推论 2.4.1 和推论 2.4.2 都是定理 2.4.2 的自然结果。

推论 2.4.3 设 $G(n\geqslant 3)$ 是简单图，若 $C(G)$ 是完全图，则 G 有 H 回路。

例 2.4.4 图 2.16(a)有 H 回路。

例 2.4.5 设 $n(\geqslant 3)$ 个人中，任两个人合在一起都认识其余 $n-2$ 个人。证明这 n
人可以排成一队，使相邻者都互相认识。

证明：每个人用一个结点表示，相互认识则用边连接相应的结点，于是得到简单图 G
若 G 中有 H 道路，则问题得证。由已知条件，对任意两点 $v_i,v_j\in V(G)$，都有 $d(v_i)+$
$d(v_j)\geqslant n-2$。此时若 v_i 与 v_j 相识，即 $(v_i,v_j)\in E(G)$，则 $d(v_i)+d(v_j)\geqslant n$；若不相识
必存在 $v_k\in V(G)$，满足 $(v_i,v_k),(v_j,v_k)\in E(G)$。否则，设 $(v_i,v_k)\notin E(G)$，就出现 v_k，
合在一起不认识 v_i，与原设矛盾。因此也有 $d(v_i)+d(v_j)\geqslant n-1$。综上由定理 2.4.1，
中存在 H 道路。

例 2.4.6 证明图 2.17 中没有 H 回路。

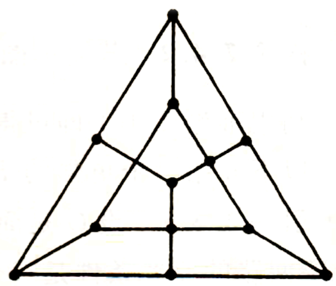


图 2.17

证明：H 回路是经过每个结点一次的初级回路。经观察，如果给某个结点标以 A，它的邻接点标以 B，B 的邻接点再标以 A，则可顺利标完 G 的全部结点。若 G 中有 H 回路，该回路一定是沿 $ABAB\cdots AB$ 走完全部结点，即标 A 与标 B 的结点数相同，由于 $|V(G)|$ 是奇数，因此 G 中没有 H 回路。

例 2.4.7 地图不存在相交的边界。如果一个地图中有 H 回路，则可以用 4 种不同颜色对它们的域进行着色，使相邻的域染不同的颜色。

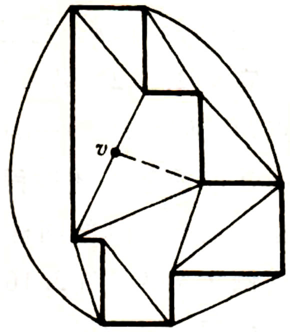


图 2.18

证明：我们用一个示意图加以直观的说明。设 H（粗线边）是 G 中的一个哈密顿回路，则 H 将 G 的域划分成回路内外两部分。每一部分的域用 2 种颜色可以染色，满足相邻域染不同颜色。不然，一定存在三个以上的域互相邻接的情形。此时必出现 v' 这样的结点。这与 H 是哈密顿回路相悖。因此结论正确。

一般情况下，给定一个图 G，判定它是否存在 H 回路，需要使用搜索法。首先去掉重边和自环，然后采用 DFS 等算法是可以实现的。但是在最坏情况下其计算复杂度与 $n!$ 成正比，它是属于 NP(Nondeterministic Polynomial)完全问题。