Lab03-Set, Relation, and Function

计算机科学导论课后习题，讲师：高晓沨，2016 秋季学期

标注您的　姓名：张颖　学号：516010910070　班级：F1607103

∗ 电子版作业请直接上传到课程网站

1. 除了课上的示例外，请给出等价关系、偏序关系、拟序关系和相容关系的例子。

Solution.

等价关系$M = \{< x, y > | < x, y > \in N * N\}$

偏序关系$S = \{< x, y > |\ x, y \in N$且$x \geq y\}$

拟序关系$R = \{< x, y > |\ x, y \in N$且$x > y\}$

相容关系$M = \{< x, y > |\ x, y \in N$且x和y写成十进制后至少有一个相同数字$\}$ □

2. 假设函数f是一个从集合A到集合B的函数，令S和T是A的子集，X和Y是B的子集。定义$f^{-1}(S) = \{a \in A \mid f(a) \in S\}$（注意该定义对任意函数都有效，不仅是可逆函数）。证明：

(a) $f(S \cup T) = f(S) \cup f(T)$.

(b) $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$.

(c) 上述两个式子将"∪"改为"∩"等式还成立吗？

Solution.

证明：不妨设$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$

(a) 1）对任意$\Lambda_1 \in f(S \cup T)$,总可以找到$a_i \in S \cup T$,使得$f(a_i) = \Lambda_1$，而此时$a_i \in S$或者$a_i \in T$.则$f(a_i) \in f(S)$ 或者$f(a_i) \in f(T)$, 所以$f(a_i) = \Lambda_1 \in f(S) \cup f(T)$；
2）对任意$\Lambda_2 \in f(S) \cup f(T)$，$\Lambda_2 \in f(S)$ 或者$\Lambda_2 \in f(T)$，则必可找到$a_i \in S$或者$a_i \in T$，使$f(a_i) = \Lambda_2$,而此时$f(a_i) = \Lambda_2 \in f(S) \cup f(T)$.
所以综上所述，$f(S \cup T) = f(S) \cup f(T)$.

(b) 1)对任意$\Lambda_3 \in f^{-1}(X \cup Y)$，则$f(\Lambda_3) \in X \cup Y$，$f(\Lambda_3) \in X$ 或者$f(\Lambda_3) \in Y$，则$f^{-1}(f(\Lambda_3)) \in f^{-1}(X)$ 或者$f^{-1}(f(\Lambda_3)) \in f^{-1}(Y)$,所以$\Lambda_3 \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$；
2)对任意$\Lambda_4 \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$，则$\Lambda_4 \in f^{-1}(X)$ 或者$\Lambda_4 \in f^{-1}(Y)$，$f^{-1}(\Lambda_4) \in X$ 或者$f^{-1}(\Lambda_4) \in Y$，所以$f^{-1}(\Lambda_4) \in X \cup Y$，所以$\Lambda_4 \in f^{-1}(X \cup Y)$.
所以综上所述，$f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$.

(c) 第一个命题不成立，第二个命题依然成立

□

3. 对于一元二次方程$ax^2 + bx + c = 0$，其中$a, b, c \in \mathbb{R}$。试设计算法，求解该方程的根。要求输入为a, b, c，输出为x。请描述算法设计思路并画出流程图（注意判断方程的可解性）。

Solution.

解题思路

1.当$a = 0$时,$bx + c = 0$;

1)若$b = 0$

当$c = 0$时，则x为任意实数；

当$c \neq 0$，则方程无实根；

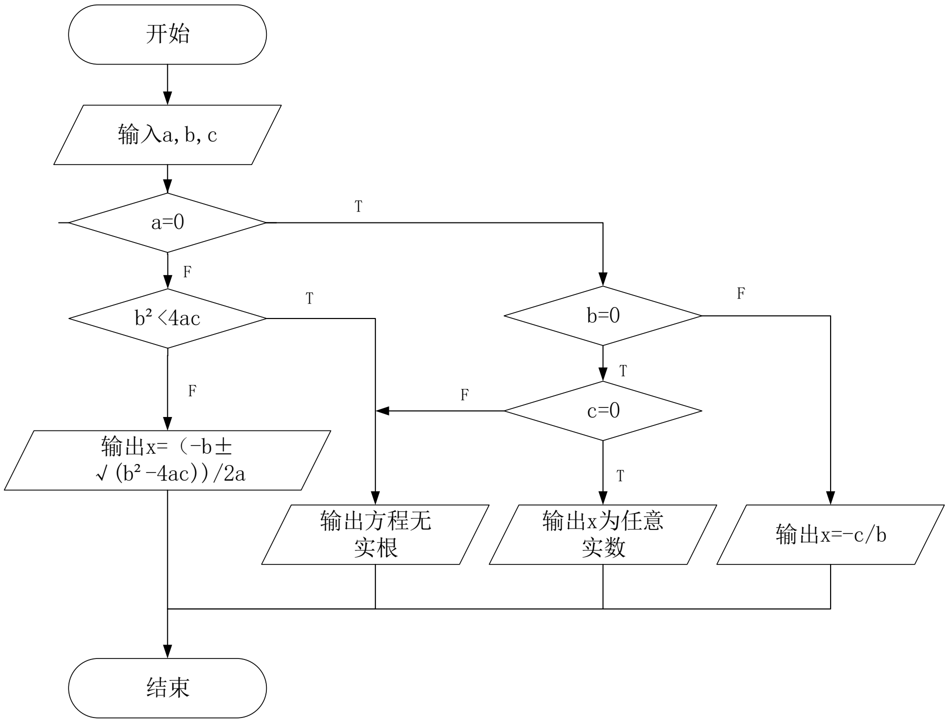
2)若$b \neq 0$,则$x = -c/b$；

2.当$a \neq 0$时，$ax^2 + bx + c = 0$，则$a[x + b/2a]^2 + c - b^2/4a = 0$，则$a[x + b/2a]^2 = -c + b^2/4a$，所以$[x + b/2a]^2 = (b^2 - 4a * c)/4 * a^2$,所以

1)若$b^2 - 4a * c < 0$，则方程无实根；

2)若$b^2 - 4a * c \geq 0$，则方程的实数解$x = [-b \pm \sqrt{b^2 - 4a * c}]/2a$.

流程图如下



□