

Lab03-Set, Relation, and Function

计算机科学导论课后习题，讲师：高晓飒，2016 秋季学期

姓名：王膺涵 学号：516072910057 班级：F1607204

1. 除了课上的示例外，请给出等价关系、偏序关系、拟序关系和相容关系的例子。

Solution. 示例如下

(a) 等价关系的实例：

i. 定义在三角形集合上的相似关系

$$\sim = \{\langle x, y \rangle \in \text{三角形集合} \times \text{三角形集合} \mid x \sim y\}$$

ii. 定义在计算机科学导论全班同学集合上的关系：在同一个计算机科学导论班级

$$\text{同班} = \{\langle x, y \rangle \in \text{students of ICS} \times \text{students of ICS} \mid x \text{与} y \text{同班}\}$$

(b) 偏序关系的实例：

定义在正整数集合上的整除关系

$$\text{整除} = \{\langle x, y \rangle \in N_+ \times N_+ \mid x \text{ 能被} y \text{ 整除}\}$$

(c) 拟序关系的实例：

定义在正整数集合上的整除且商不为1的关系

$$\text{整除且商不为1} = \{\langle x, y \rangle \in N_+ \times N_+ \mid x \text{ 能被} y \text{ 整除, 且商不为1}\}$$

(d) 相容关系的实例：

定义在交大全体同学同学集合上的关系：曾在同一个班级上课

$$\text{同班} = \{\langle x, y \rangle \in \text{students of SJTU} \times \text{students of SJTU} \mid x \text{与} y \text{曾在同班上课}\}$$

□

2. 假设函数 f 是一个从集合 A 到集合 B 的函数，令 S 和 T 是 A 的子集， X 和 Y 是 B 的子集。定义 $f^{-1}(S) = \{a \in A \mid f(a) \in S\}$ （注意该定义对任意函数都有效，不仅是可逆函数）。证明：

(a) $f(S \cup T) = f(S) \cup f(T)$.

(b) $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$.

(c) 上述两个式子将“ \cup ”改为“ \cap ”等式还成立吗？

Solution. 证明如下

(a) $f(S \cup T) = \{f(x) \mid x \in S \cup T\} = \{f(x) \mid x \in S\} \cup \{f(x) \mid x \in T\} = f(S) \cup f(T)$.

(b) $f^{-1}(X \cup Y) = \{a \in A \mid f(a) \in X \cup Y\} = \{a \in A \mid f(a) \in X\} \cup \{a \in A \mid f(a) \in Y\} = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$

(c) (a)将不再成立，反例如下：

设函数 $f: R \rightarrow R_+ \cup \{0\}$ $y = x^2$, $S = \{1, 0\}, T = \{-1, 0\}, S \cap T = \{0\}$
 $f(S \cap T) = f(0) = 0$, $f(S) \cap f(T) = \{1, 0\}$
可见 $f(S \cap T) = f(S) \cap f(T)$ 不再成立

(b)仍成立，解释如下：

先证明 $x \in f^{-1}(X \cap Y) \Rightarrow x \in f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$

$\forall x \in f^{-1}(X \cap Y)$

$\Rightarrow f(x) \in X \cap Y$

$\Rightarrow f(x) \in X \wedge f(x) \in Y$

$\Rightarrow x \in f^{-1}(X) \wedge x \in f^{-1}(Y)$

$\Rightarrow x \in f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$

再证明 $x \in f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y) \Rightarrow x \in f^{-1}(X \cap Y)$

$\forall x \in f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$

$\Rightarrow f(x) \in X \wedge f(x) \in Y$

$\Rightarrow f(x) \in X \cap Y$

$\Rightarrow x \in f^{-1}(X \cap Y)$

综上，可知 $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$ 成立

□

3. 对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ，其中 $a, b, c \in \mathbb{R}$ 。试设计算法，求解该方程的根。要求输入为 a, b, c ，输出为 x 。请描述算法设计思路并画出流程图（注意判断方程的可解性）。

Solution. 思路如下

输入 a, b, c 首先判断输入值 a, b, c 是否为零

(a) $a = 0$:

i. $b = 0$:

A. $c = 0$:

输出：方程有无穷多解

B. $c \neq 0$

输出： x 方程解不存在

ii. $b \neq 0$:方程化为一元一次方程，计算： $x = -c/b$

输出： x

(b) $a \neq 0$:计算判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$,判断其正负

i. $\Delta > 0$:方程有两个不同的实数解，计算 $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
输出 x_1, x_2

ii. $\Delta = 0$:方程有两个相同的实数解，计算： $x_1 = x_2 = -b/2a$

输出 x_1

iii. $\Delta < 0$:方程无实数解

输出：方程无实数解

流程图如下

□

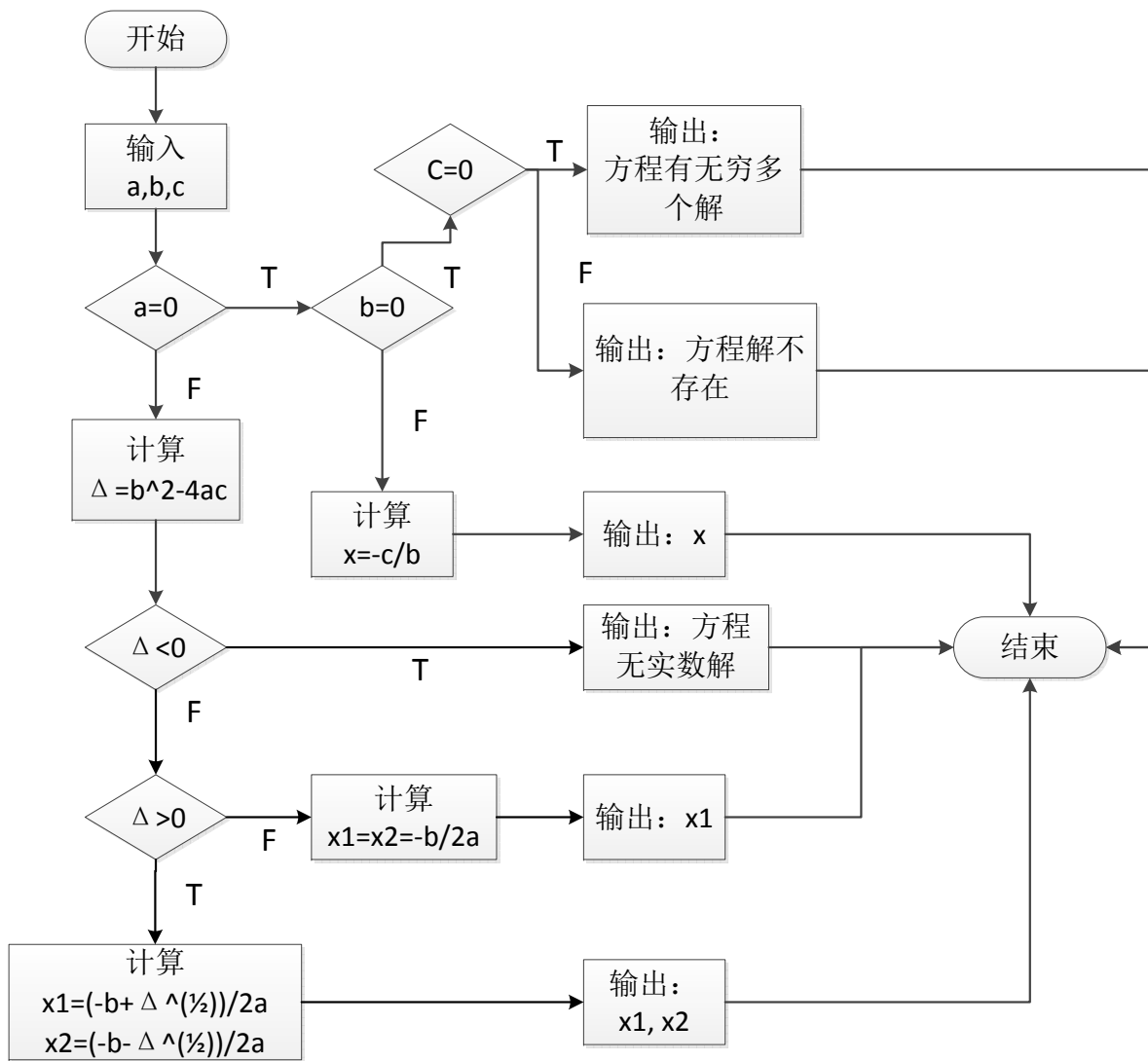


Figure 1: 第三题流程图