

Lab03-Set, Relation, and Function

计算机科学导论课后习题, 讲师: 高晓飒, 2016 秋季学期

标注您的 姓名: ____王羽亮____ 学号: ____516021910592____ 班级: ____F1607103____
* 电子版作业请直接上传到课程网站

1. 除了课上的示例外, 请给出等价关系、偏序关系、拟序关系和相容关系的例子。

Solution.

等价关系例子: 令 $w = \{0, 1, 2, \dots\}$, 定义 $m \sim n$ 等价于 $m - n$ 是 5 的倍数, 则 \sim 是在 w 上的等价关系。

偏序关系例子: 对于实数集 \mathbb{R} , 定义 $m \sim n$ 等价于 m 大于等于 n , 则 \sim 是在 \mathbb{R} 上的偏序关系。

拟序关系例子: 对于实数集 \mathbb{R} , 定义 $m \sim n$ 等价于 m 大于 n , 则 \sim 是在 \mathbb{R} 上的拟序关系。

相容关系例子: 对于全体中国人的名字组成的集合 A , 定义 $m \sim n$ 等价于 m, n 均属于 A 且 m 和 n 有一个字相同, 则 \sim 是在 A 上的相容关系。 \square

2. 假设函数 f 是一个从集合 A 到集合 B 的函数, 令 S 和 T 是 A 的子集, X 和 Y 是 B 的子集。定义 $f^{-1}(S) = \{a \in A \mid f(a) \in S\}$ (注意该定义对任意函数都有效, 不仅是可逆函数)。证明:

- (a) $f(S \cup T) = f(S) \cup f(T)$.
(b) $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$.
(c) 上述两个式子将“ \cup ”改为“ \cap ”等式还成立吗?

Solution.

- (a) 一方面, $\forall a \in S \cup T$, 即 $a \in S$ 或 $a \in T$, $a \in S$ 时 $f(a) \in f(S)$, $a \in T$ 时 $f(a) \in f(T)$, 故 $f(a) \in f(S \cup T)$, 故 $f(S \cup T) \subseteq f(S) \cup f(T)$. 另一方面, $\forall a' \in f(S) \cup f(T)$, 即 $a' \in f(S)$ 或 $a' \in f(T)$, $a' \in f(S)$ 时 a' 的原像 $a \in S$, $a' \in f(T)$ 时 a' 的原像 $a \in T$, 故 $a \in S \cup T$, 故 $f(S \cup T) \supseteq f(S) \cup f(T)$. 因此, $f(S \cup T) = f(S) \cup f(T)$.
- (b) 对于 $a \in A$, $a \in f^{-1}(X \cup Y) \iff f(a) \in X \cup Y \iff f(a) \in X$ 或 $f(a) \in Y$. 而 $a \in f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y) \iff a \in f^{-1}(X)$ 或 $a \in f^{-1}(Y) \iff f(a) \in X$ 或 $f(a) \in Y$. 因此 $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$.
- (c) $f(S \cap T) = f(S) \cap f(T)$ 不成立, 反例: $f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 1, S = \{2, 3\}, T = \{1, 2\}, f(S \cap T) = \{2\}, f(S) \cap f(T) = \{1, 2\}$. $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$ 成立, 因为对于 $a \in A$, $a \in f^{-1}(X \cap Y) \iff f(a) \in X \cap Y \iff f(a) \in X$ 且 $f(a) \in Y$. 而 $a \in f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y) \iff a \in f^{-1}(X)$ 且 $a \in f^{-1}(Y) \iff f(a) \in X$ 且 $f(a) \in Y$. 因此 $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$. \square

3. 对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$, 其中 $a, b, c \in \mathbb{R}$. 试设计算法, 求解该方程的根。要求输入为 a, b, c , 输出为 x 。请描述算法设计思路并画出流程图 (注意判断方程的可解性)。

Solution.

先判断是否为二次方程（即a是否为零），若a为零，讨论此方程无解、有唯一解或有无数解这三种情况；若a非零，讨论判别式，得出另外无解，有唯一解和有两解的情况。 □

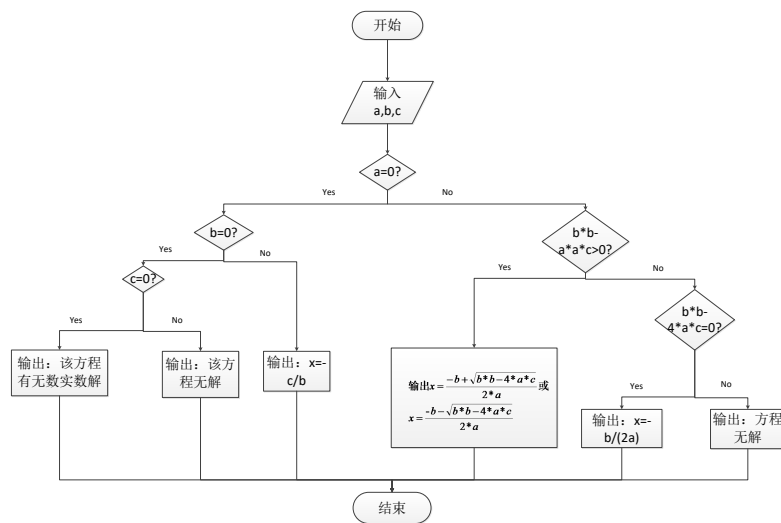


Figure 1: 第三题流程图