# Lab05-Cardinality

计算机科学导论课后习题，讲师：高晓沨，2016 秋季学期

标注您的　姓名：王超玥　学号：516072910087　班级：F1607204

＊ 电子版作业请直接上传到课程网站

1. 令$\omega$表示自然数集合$\{0,1,2,3,\cdots\}$,证明等式$f(m,n)=2^m(2n+1)-1$ 定义了从$\omega\times\omega$到$\omega$的一个双射关系。(这个函数称为*coding* $\pi$，是一种广泛使用的将$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$中的元素$(m,n)$映射到$\mathbb{N}$上的映射方式，例如Gödel Coding.)

**Solution.**
当$m=0$时，$(0,n)$通过$f(0,n)=2n$与自然数中的全体偶数一一对应；
当$m\neq 0$时，$(m,n)$与自然数中的全体奇数一一对应，先证满射：
每一个奇数+1后，将其所有2的因数提出来即可写成$2^m(2n+1)$形式，满射证毕。
再证单射：
反证法：假设存在$m_1,n_1,m_2,n_2\in\omega,m_1\neq m_2$或$n_1\neq n_2$，使得$f(m_1,n_1)=f(m_2,n_2)$
即$2^{m_1}(2n_1+1)-1=2^{m_2}(2n_2+1)-1$
$\iff 2^{(m_1-m_2)}(2n_1+1)=2n_2+1$
因为右边为奇数，则左边必为奇数，所以$m_1=m_2$。
$\iff 2n_1+1=2n_2+1$
$\iff n_1=n_2$
推出矛盾，则单射成立。
$(m,n)$与自然数中的全体奇数一一对应成立
所以等式$f(m,n)=2^m(2n+1)-1$定义了从$\omega\times\omega$到$\omega$的一个双射关系。 □

2. 令$m<n\in\mathbb{N}$，证明实数区间$[0,1]$与$(m,n)$ 等势。

**Solution.**
先证：$[0,1]\approx(0,1)$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & x=0,\\ x & \text{若}0<x<1\text{且}x\neq\frac{1}{2^n},n\in\omega\ ,\\ \frac{1}{2^{n+2}} & \text{若}x=\frac{1}{2^n},n\in\omega.\end{cases}$$

证毕
再证：$(0,1)\approx(m,n)$
$h(x)=(n-m)x+m$
证毕
由势的传递性可得：
$[0,1]\approx(0,1)$且$(0,1)\approx(m,n)$，则$[0,1]\approx(m,n)$
实数区间$[0,1]$与$(m,n)$等势。 □

3. 给定两个集合$A$与$B$，令card $A=a$，card $B=b$。

   (a) card ${}^AB=?$

   **Solution.** card ${}^AB=b^a$ □

   (b) 证明当$b\geq 2$时，不存在双射$f:A\to{}^AB$。

**Solution.**
集合$A$与$^A B$皆为有限集合
又card $A=a$，card $^A B=b^a$
$b\geq 2$时，由数学归纳法可得$a<b^a$恒成立。
则集合$A$与$^A B$不可能等势
所以不存在双射 □

(c) 令$A=\omega$，$B=\{0,1\}$，已知card $\omega=\aleph_0$，求card $^\omega\{0,1\}=$?

**Solution.**
已知$P(\omega)\approx {}^\omega\{0,1\}$，$(0,1)\approx\mathbb{R}$
下证：$P(\omega)\approx(0,1)$
直接构造双射比较困难，所以借助Cantor-Bernstein定理：
若两个集合分别有到对方的单射，则两者基数相等。
1、构造$f:P(\omega)\to(0,1)$
若S为$\omega$的非空子集，定义:

$$f(S)=\sum_{n\in S}\frac{1}{10^{n+1}}$$

当$n\in S$,则f(x)的10进制小数小数点后第n+1位为1，否则为0。
另外补充定义$f(\emptyset)=0.2$
2、再来构造$g:(0,1)\to P(\omega)$
设$a\in(0,1)$,定义$g(a)=\{[(1+a)10^k]|k\in\omega\}$
例如$g(\sqrt{2}-1)=\{1,14,141,1414,14142,141421,1414213,14142135,...\}$
g(a)是由1+a截断到不同位数得到的，加1则是为了在前面补0。
显然f，g都是单射
故$P(\omega)\approx(0,1)$，由势的传递性：
$^\omega\{0,1\}\approx\mathbb{R}$
所以card $^\omega\{0,1\}=\aleph_1$ □