Lab05-Cardinality

计算机科学导论课后习题，讲师：高晓沨，2016 秋季学期

标注您的　姓名：陆浩然　学号：516072910082　班级：F1607204

1. 令ω表示自然数集合$\{0,1,2,3,\cdots\}$,证明等式$f(m,n)=2^m(2n+1)-1$定义了从$\omega\times\omega$到ω的一个双射关系。(这个函数称为*coding* π，是一种广泛使用的将$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$中的元素$(m,n)$映射到$\mathbb{N}$上的映射方式，例如Gödel Coding.)

Solution.

若证明对任意两组不完全相同的(m_i,n_i)，(m_j,n_j)（$n,m\in\mathbb{N}$，$m_i\neq m_j$与$n_i\neq n_j$至少一个成立），必分别与两个不同的$x\in f(m,n)$对应（即单射），且$\forall x\in(N)$，均可找到一组(m,n)与之对应，则可认为$\omega\times\omega$与ω是一一对应的，即形成了一个双射关系，下证明：
1) 用反证法证明对任意两组不完全相同的(m_i,n_i)，(m_j,n_j)（$n,m\in\mathbb{N}$，$m_i\neq m_j$与$n_i\neq n_j$至少一个成立），必分别与两个不同的$x\in f(m,n)$对应
相当于$\exists(m_i,n_i)(m_j,n_j)$，使f($m_i$,$n_i$)=f($m_j$,$n_j$)成立，即：
$2^{m_i}(2n_i+1)=2^{m_j}(2n_j+1)$
$2^{m_i-m_j}=\frac{2n_j+1}{2n_i+1}$
$m_i\neq m_j$时，等式右边$\frac{2n_j+1}{2n_i+1}$显然不可能为偶数或偶数的倒数，产生矛盾
$m_i=m_j$时，不难看出，等式右边等于1，即$n_i=n_j$，此时(m_i,n_i)=(m_j,n_j)，与题设矛盾
故假设不成立
又对$n,m\in\mathbb{N}$，f(m,n)$\in\mathbb{N}$必成立
综上所述，对任意两组不完全相同的(m_i,n_i)，(m_j,n_j)（$n,m\in\mathbb{N}$，$m_i\neq m_j$与$n_i\neq n_j$至少一个成立），必分别与两个不同的$x\in f(m,n)$对应
2)证明对一切x$\in\mathbb{N}$，均有x$\in f(m,n)$
$\forall x\in\mathbb{N}$:
$x+1=2^m(2n+1)$
x为奇数时，令$x+1=2^i\times p$，p为奇数
此时，$m=i,n=\frac{p-1}{2}$即可
x为偶数时，令$m=0,n=\frac{x}{2}$即可
综上所述，对一切x$\in\mathbb{N}$，均有x$\in f(m,n)$
综合1)2)的结论，可以得出，等式$f(m,n)=2^m(2n+1)-1$定义了从$\omega\times\omega$到ω的一个双射关系。 □

2. 令$m<n\in\mathbb{N}$，证明实数区间$[0,1]$与(m,n)等势。

Solution.

写出一个从$[0,1]$到(m,n)的双射即可（以函数形式）

$$f(x)=\begin{cases} m+(n-m)x & \text{x}\neq 0,\frac{1}{2^i},\text{i}\in\mathbb{N}\text{且x}\in[0,1] \\ \frac{m+n}{2} & \text{x=0} \\ m+(n-m)\frac{x}{4} & \text{x}=\frac{1}{2^i},\text{i}\in\mathbb{N} \end{cases}$$

□

3. 给定两个集合A与B，令card $A=a$，card $B=b$。

   (a) card ${}^AB=$?

(b) 证明当$b \geq 2$时，不存在双射$f : A \to {}^A B$。

(c) 令$A = \omega$，$B = \{0, 1\}$，已知$\mathrm{card}\, \omega = \aleph_0$，求$\mathrm{card}\, {}^\omega \{0, 1\} =?$

Solution.

(a) $\forall x \in A$，有b个B中元素可以与之对应
故所有可能的函数有b^a个，即$\mathrm{card}\, {}^A B = b^a$

(b) 首先，根据康托尔定理，没有集合和自己的幂集等势。
而b=2时，$\mathrm{card}\, {}^A B = 2^a$，注意到A的幂集亦有：$card^A 2 = 2^a$，因此二者等势。由此，${}^A 2$不可能与A等势，二者也就不可能一一对应，即不存在双射。
对b>2的情况，不难看出，$\mathrm{card}\, {}^A B = b^a > 2^a$，故其势比A的幂集还要大，不可能与A建立双射。
综上所述，当$b \geq 2$时，不存在双射$f : A \to {}^A B$。

(c) 首先,$\mathrm{card}\, \mathbb{R} = \aleph_1$，此处试证明$\mathrm{card}\, {}^\omega \{0, 1\}$与之等势。
又不难得出，$\mathrm{card}\, {}^\omega \{0, 1\} \approx card^\omega 2$，以及$\mathbb{R} \approx [0, 1]$
故证明 $card^\omega 2$≈[0,1]即可
$[0, 1]$中的元素在二进制下可表示为：$x = 0.a_1 a_2 a_3 ...$且a_i=0or1，不难看出，$\forall a \in [0, 1]$总有唯一的x与之对应，二者构成双射关系。
而对于自然数的幂集中的元素b而言，其必包含$\mathbb{N}$中的部分或全部元素或是空集，且不会重复。构造一新的二进制数集合$\{y | y = 0.a_1 a_2 a_3 ...$ 满足当$i \in b, a_i = 1$，当$i \notin b, a_i = 0\}$。根据幂集定义，显然这两个集合是等势的。
又这个构造出的集合和之前的集合是完全相同的，由此，$card^\omega 2$≈[0,1]成立。
因此，$\mathrm{card}\, {}^\omega \{0, 1\} \approx \aleph_1$

$\square$