Lab05-Cardinality

计算机科学导论课后习题，讲师：高晓沨，2016 秋季学期

标注您的　姓名：刘哲源　学号：516072910081　班级：F1607204

∗ 电子版作业请直接上传到课程网站

1. 令ω表示自然数集合$\{0,1,2,3,\cdots\}$,证明等式$f(m,n)=2^m(2n+1)-1$定义了从$\omega\times\omega$到ω的一个双射关系。(这个函数称为*coding* π，是一种广泛使用的将$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$中的元素$(m,n)$映射到$\mathbb{N}$上的映射方式，例如Gödel Coding.)

   Solution. 证明：

   (a) 单射：反证，假设$f:(m,n)\to\{0,1,2,3,\cdots\}$不是单射。
   则$\exists(m_1,n_1),(m_2,n_2)$,使得$f(m_1,n_2)=f(m_2,n_2)$
   不妨设$m_1>m_2$,则有：$2^(m_1-m_2)(2n_1+1)=2n_2+1$
   该等式左边为偶数，右边为奇数，故不可能成立，矛盾。
   即该映射为单射。

   (b) 满射：即$\exists(m,n)$,使得$\forall x\in\{0,1,2,3,\cdots\}$,$2^m(2n+1)-1=x$
   当$m=0$时,对所有偶数x成立; 当$m\neq 0$时,对所有奇数x成立。即该映射为满射。

   综上所述，$f:(m,n)\to\{0,1,2,3,\cdots\}$为一双射。 □

2. 令$m<n\in\mathbb{N}$，证明实数区间$[0,1]$与(m,n)等势。

   Solution. 证明：

   (a) 先证$(0,1)\approx(m,n)$
   构造$f(x)=(n-m)x+m$
   即为$(0,1)\to(m,n)$的一个双射;

   (b) 再证$[0,1]\approx(0,1)$
   在$(0,1)$中取出数列a_n构成集合$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$
   在$[0,1]$中取出数列b_n构成集合$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n,\cdots\}$
   其中$a_n=1/n+1; b_1=0, b_n=1/n-1\quad(n=2,3,4\cdots)$
   则有$f(a_n)=b_n$为$A\to B$的一个双射;
   又$(0,1)-A=[0,1]-B$,故$[0,1]\approx(0,1)$

   综上所述：$[0,1]\approx(0,1)\approx(m,n)$ □

3. 给定两个集合A与B，令card $A=a$，card $B=b$。

   (a) card ${}^AB=?$

   (b) 证明当$b\geq 2$时，不存在双射$f:A\to{}^AB$。

   (c) 令$A=\omega$，$B=\{0,1\}$，已知card $\omega=\aleph_0$，求card ${}^\omega\{0,1\}=?$

   Solution.

   (a) card ${}^AB=b^a$
   对于$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_k,\cdots,a_n\}$,每个$a_k$的像都有$b$种取法
   即　card ${}^AB=b^a$

(b) 当$b \geq 2$时,$\text{card}\ A = a \neq \text{card}\ {}^{A}B = b^{a}$
即A与${}^{A}B$不等势，不存在双射$f : A \to {}^{A}B$。

(c) $\text{card}\ B = 2$,故${}^{\omega}B = P(\omega)$
即$\text{card}\ {}^{\omega}\{0,1\} = \aleph_1$

$\square$