Lab06-Proof

计算机科学导论课后习题，讲师：高晓沨，2016 秋季学期

标注您的 姓名：文丽 学号：516072910067 班级：F1607204

$*$ 电子版作业请直接上传到课程网站

1. MATLAB作图题

   (a) 除课堂示例外，请设计一个双射函数$f(x):(0,1)\rightarrow \mathbb{R}$并用MATLAB画出$f$的图像，图像中$x$和$f(x)$的取值范围自定，需包括$x$和$y$轴的标注以及标题，线型自定，美观即可。

   (b) 请根据课堂上的示例程序（程序图片如Fig. 1所示），绘制如Fig. 2箭头方向的$\omega\rightarrow\omega$线性化图像（注意方向与上课示例相反）。要求：

      i. $x+y=m$中m取值为$30:10:100$，即共绘制8条线；

      ii. 请将MATLAB脚本代码嵌入Latex中一起提交，格式如右下的Matlab源代码所示。

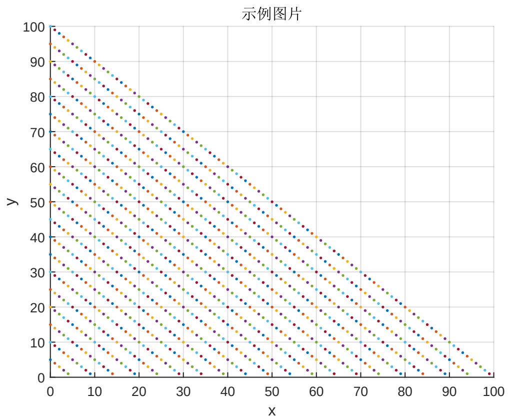

Figure 1: Matlab示例图片

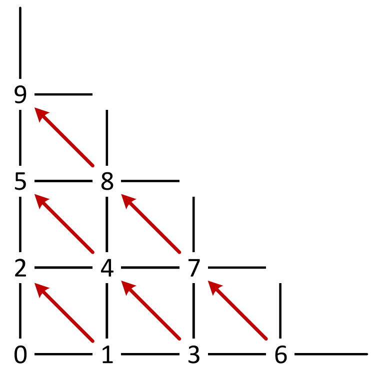

Figure 2: $\omega\rightarrow\omega$线性化曲线

Solution. 答：

(a) 设计函数$f(x)=ln(\dfrac{1}{x}-1)$，图像如下：

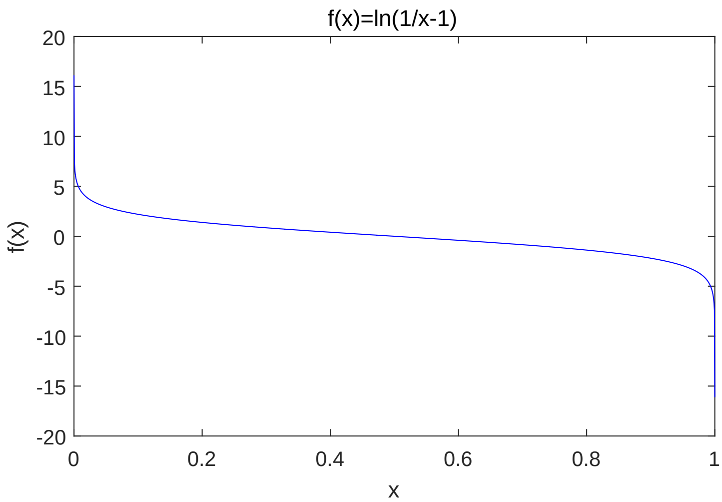

Figure 3: $f(x)$函数图像

(b) 映射表达式，线性化图像和源代码如下：

由于方向与课堂示例相反，此映射方式为

$$f(m,n) = \frac{(m+n)^2 + 3n + m}{2}$$

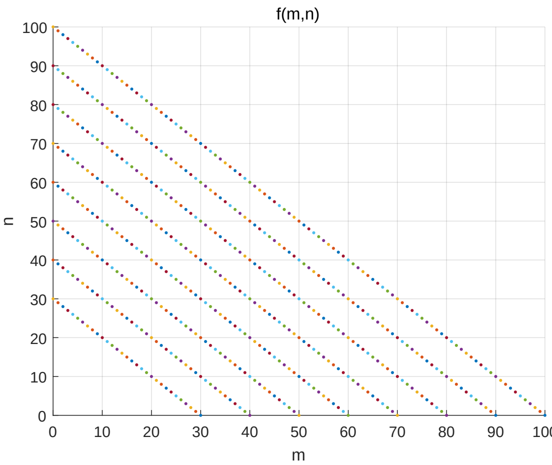

Figure 4: 线性化图像

1b解答中的Matlab源代码

```
x=30;
y=0;
tick=10;
temp=30;
lim=101;
figure;
hold on;
grid on;
while temp<lim
    x=temp;
    while x>-1
        y=temp-x;
        plot(x,y,'.');
        x=x-1;
    end
    temp=temp+tick;
end
xlabel('m')
ylabel('n')
title('f(m,n)')
```

1b题中的Matlab源代码

```
x=0;
y=0;
tick=5;
temp=0;
lim=101;
figure;
hold on;
grid on;
while temp<lim
    x=0;
    while x<temp+1
        y=temp-x;
        plot(x,y,'.');
        x=x+1;
    end
    temp=temp+tick;
end
xlabel('x')
ylabel('y')
```

2. 证明题

(a) 反向推断法：证明如果$n \in \mathbb{Z}^+$（正整数），且$n \mod 4 = 2$ or 3，那么n不是一个平方数（即其平方根为整数的数）。

(b) 最小反例法：证明如果$\forall n \in \mathbb{Z}$且$n > 5$，那么$2^n > 10n$成立。

(c) 强数学归纳法：令序列$\{a_i\}$满足

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_1 = 2, \\ a_2 = 3, \\ a_k = a_{k-1} + a_{k-2} + a_{k-3}, \quad \forall k \geq 3, \end{cases}$$

证明$\forall n \in \mathbb{N}$，有$a_n \leq 2^n$。

Solution. 答：

(a) 假设n，$n \in \mathbb{Z}^+$是一个平方数且$n \mod 4 = 2$ or 3。
若n为奇数，设$n = 2i+1 (i \geq 0$且i为整数$)$，可知i^2为整数，由于$n \mod 4 = 2$ or 3，所

以$n=4k+2 \text{ or } 3(k\in\mathbb{Z})$ 且$k\geq 0$，代入得$i^2=(k-i)+\dfrac{1}{4} \text{ or } (k-i)+\dfrac{1}{2}$，由于$i$,$k$均为整数，可知$i^2$不为整数，与假设条件矛盾。
若n为偶数，设$n=2i(i\geq 0$且i为整数)，可知i^2为整数，由于$n \mod 4=2 \text{ or } 3$，所以$n=4k+2 \text{ or } 3(k\in\mathbb{Z})$且$k\geq 0$，代入得$i^2=k+\dfrac{1}{2} \text{ or } k+\dfrac{3}{4}$，由于$i$,$k$均为整数，可知$i^2$不为整数，与假设条件矛盾。
综上所述，如果$n\in\mathbb{Z}^+$（正整数），且$n \mod 4=2 \text{ or } 3$，那么n不是一个平方数（即其平方根为整数的数）。

(b) 假设对于$n>5$，存在$2^n\leq 10n$，设k为满足该条件的最小正整数。
由于$2^6>6\times 10$，必有$k>6$，所以$k-1>5$，由于k是使原命题不成立的最小正整数，则$k-1$能够使原命题成立。由此可得，

$$2^{k-1}>10(k-1)$$

$$2^k\leq 10k$$

所以$20(k-1)<2^k\leq 10k$，可知$20(k-1)<10k$，得到$k<2$，与假设$k>6$矛盾。
综合上述，如果$\forall n\in\mathbb{Z}$且$n>5$，那么$2^n>10n$成立。

(c) 对于$k=3$，$a_k=6<2^3$，原命题成立。
对$\forall k>3$，如果对$3\leq k\leq n$，原命题成立，则$a_{n+1}=a_n+a_{n-1}+a_{n-2}\leq 2^n+2^{n-1}+2^{n-2}=7\times 2^{n-2}<2^{n+1}$。可知对于$n+1$原命题也成立。
所以，$\forall n\in\mathbb{N}$，有$a_n\leq 2^n$。