Lab06-Proof

计算机科学导论课后习题，讲师：高晓沨，2016 秋季学期

标注您的　姓名：徐秋雨　学号：516072910068　班级：F1607204

∗ 电子版作业请直接上传到课程网站

1. MATLAB作图题

   (a) 除课堂示例外，请设计一个双射函数$f(x):(0,1)\to\mathbb{R}$并用MATLAB 画出f的图像，图像中x和$f(x)$的取值范围自定，需包括x和y轴的标注以及标题，线型自定，美观即可。

   (b) 请根据课堂上的示例程序（程序图片如Fig. 1所示），绘制如Fig. 2箭头方向的$\omega\to\omega$线性化图像（注意方向与上课示例相反）。要求：

      i. $x+y=m$中m取值为$30:10:100$，即共绘制8条线；

      ii. 请将MATLAB脚本代码嵌入Latex 中一起提交，格式如右下的Matlab 源代码所示。

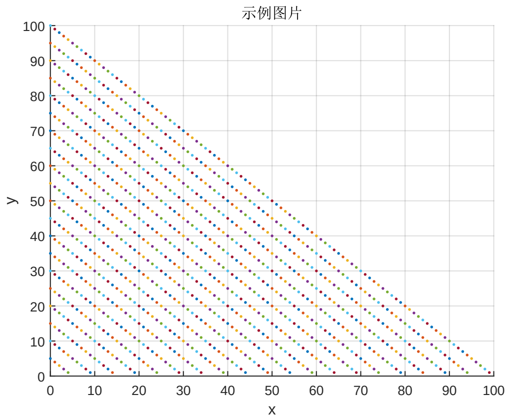

Figure 1: Matlab示例图片

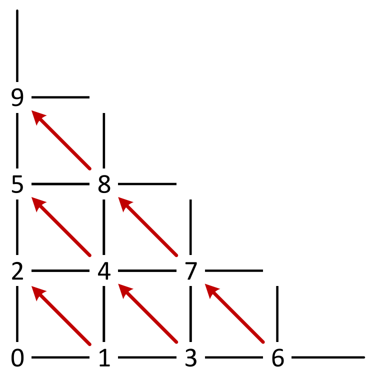

Figure 2: $\omega\to\omega$线性化曲线

Solution.

(a) $f(x)=\begin{cases}-ln2x, & \text{if } 0<x\le\frac{1}{2}\\ ln2(x-\frac{1}{2}), & \text{if } \frac{1}{2}<x<1\end{cases}$

1a题函数图像如$figure3$所示：

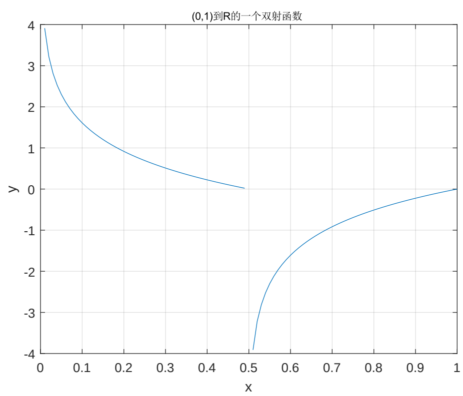

Figure 3: 1a题函数图像

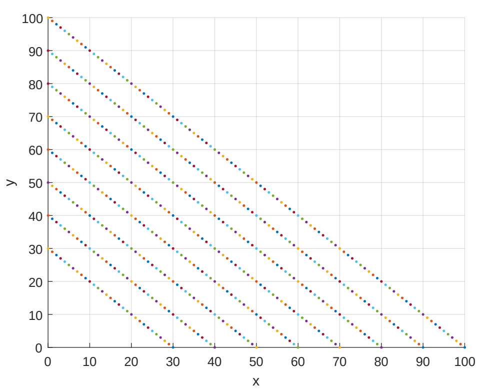

Figure 4: $\omega\to\omega$线性化曲线

(b) 1b题$\omega \to \omega$线性化曲线如$figure4$所示：
MATLAB脚本代码如下所示：

1b题中的Matlab脚本代码

```
x=0;
y=0;
tick=10;
temp=30;
lim=101;
figure;
hold on;
grid on;
while temp<lim
    x=temp;
    while x>-1
        y=temp-x;
        plot(x,y,'.');
        x=x-1;
    end
    temp=temp+tick;
end
xlabel('x')
ylabel('y')
```

1b题中的Matlab源代码

```
x=0;
y=0;
tick=5;
temp=0;
lim=101;
figure;
hold on;
grid on;
while temp<lim
    x=0;
    while x<temp+1
        y=temp-x;
        plot(x,y,'.');
        x=x+1;
    end
    temp=temp+tick;
end
xlabel('x')
ylabel('y')
```

□

2. 证明题

(a) 反向推断法：证明如果$n \in \mathbb{Z}^+$（正整数），且$n \mod 4 = 2 \text{ or } 3$，那么$n$不是一个平方数（即其平方根为整数的数）。

(b) 最小反例法：证明如果$\forall n \in \mathbb{Z}$且$n > 5$，那么$2^n > 10n$成立。

(c) 强数学归纳法：令序列$\{a_i\}$满足

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_1 = 2, \\ a_2 = 3, \\ a_k = a_{k-1} + a_{k-2} + a_{k-3}, & \forall k \geq 3, \end{cases}$$

证明$\forall n \in \mathbb{N}$，有$a_n \leq 2^n$。

Solution.

(a) 假设$n \in \mathbb{Z}^+$，且$n \mod 4 = 2 \text{ or } 3$，且$n$是一个平方数，即$n = m^2$,$m \in \mathbb{Z}^+$。
当m为奇数时，即$m = 2k+1$,$n \in \mathbb{Z}^+$时，$n = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1$，则$n \mod 4 = 1$。
当m为偶数时，即$m = 2k$,$n \in \mathbb{Z}^+$时，$n = (2k)^2 = 4k^2$，则$n \mod 4 = 0$。
综上所述，当n是一个平方数时，$n \mod 4 = 0 \text{ or } 1$，与已知矛盾。
原命题得证。

(b) 如果对于$\forall n \in \mathbb{Z}$ 且$n > 5$，$2^n > 10n$不都成立。则一定存在n使$2^n > 10n$不成立。则n中一定存在最小值，记作k。
当$n = 6$时，$2^6 > 10 * 6$成立。

由于k是使$2^n > 10n$不成立的最小值，则对于$k-1$，$2^n > 10n$成立，即$2^{k-1} > 10(k-1)$。
然而$2^k \leq 10k$，即$2^{k-1} \leq 5k < 10(k-1)$，与$2^{k-1} > 10k-1$矛盾。
所以初始假设不成立，原命题得证。

(c) 易知$k = 0, 1, 2$ ，$a_n \leq 2^n$成立。当$k = 3$时，$a_3 = 6 \leq 2^3$，成立。
假设对于$k \geq 3$且$3 \leq n \leq k$，$a_k \leq 2^k$都成立。则要证对于$k+1$，$a_{k+1} \leq 2^{k+1}$成立。
$a_{k+1} = a_k + a_{k-1} + a_{k-2} \leq 2^k + 2^{k-1} + 2^{k-2} = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4})2^k \leq 2^{k+1}$。
所以当$k+1$时，$a_{k+1} \leq 2^{k+1}$ 成立。
综上所述，原命题得证。

□