Lab06-Proof

计算机科学导论课后习题，讲师：高晓沨，2016 秋季学期

标注您的　姓名：曾志坤　学号：516072910063　班级：F1607204

∗ 电子版作业请直接上传到课程网站

1. MATLAB作图题

   (a) 除课堂示例外，请设计一个双射函数$f(x):(0,1)\to\mathbb{R}$并用MATLAB画出f的图像，图像中x和$f(x)$的取值范围自定，需包括x 和y轴的标注以及标题，线型自定，美观即可。

   Solution. $f(x) = cot(\pi x)$

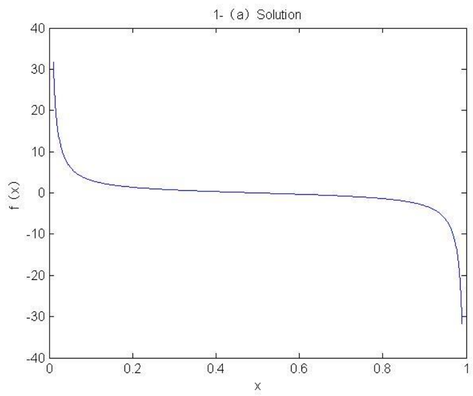

Figure 1: 1-(a)Solution

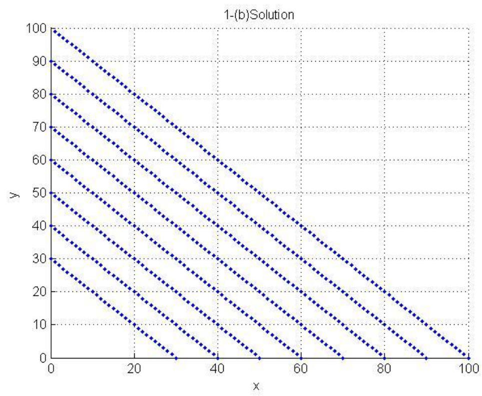

Figure 2: 1-(b)Solution

□

   (b) 请根据课堂上的示例程序（程序图片如Fig. 3 所示），绘制如Fig. 4 箭头方向的$\omega\to\omega$线性化图像（注意方向与上课示例相反）。要求：

      i. $x+y=m$中m取值为$30:10:100$，即共绘制8条线；

      ii. 请将MATLAB脚本代码嵌入Latex中一起提交，格式如右下的Matlab源代码所示。

      Solution. 图在题目上方，Matlab源代码在示例图下方示例程序的Matlab源代码旁

□

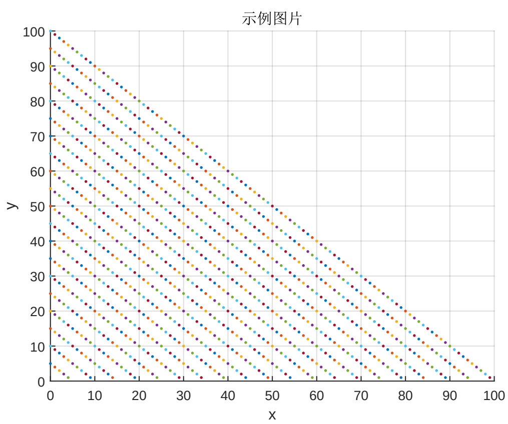

Figure 3: Matlab示例图片

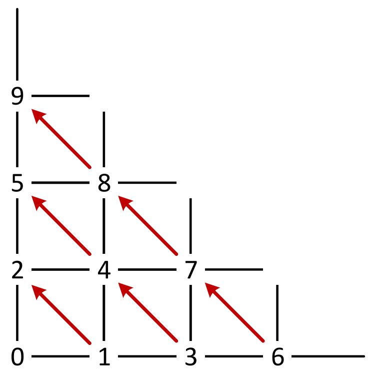

Figure 4: $\omega\to\omega$线性化曲线

1b题中的Matlab源代码

```matlab
x=0;
y=0;
tick=5;
temp=0;
lim=101;
figure;
hold on;
grid on;
while temp<lim
    x=0;
    while x<temp+1
        y=temp-x;
        plot(x,y,'.');
        x=x+1;
    end
    temp=temp+tick;
end
xlabel('x')
ylabel('y')
```

1b题Solution的Matlab源代码

```matlab
x=0;
y=0;
tick =10;
temp=30;
lim=101;
figure ;
hold on ;
grid on ;
while temp<lim
    y=0;
    while y<temp+1
        x=temp-y;
        plot(x,y,'.');
        y=y+1;
    end
    temp=temp+tick;
end
xlabel ('x')
ylabel ('y')
```

2. 证明题

(a) 反向推断法：证明如果$n \in \mathbb{Z}^+$（正整数），且$n \mod 4 = 2 \text{ or } 3$，那么$n$不是一个平方数（即其平方根为整数的数）。

Solution. 使用反向推断法，我们取一个平方数$m = n^2$，这里只需要证明$m \mod 4 = 0 \text{ or } 1$
在这里，即证明$m - 1$ 能被4整除或者m能被4整除
当n为偶数时，即$n = 2k$，则一定有$m = 4k^2$，此时，m一定能被4整除。当n 为奇数时，$n = 2k + 1$，则$m = 4k^2 + 4k + 1$，此时$m - 1$一定能被4 整除。这里的n具有普遍性，所以覆盖了所有的正整数
由于$\neg p \to \neg q \Leftrightarrow q \to p$
命题得证 □

(b) 最小反例法：证明如果$\forall n \in \mathbb{Z}$且$n > 5$，那么$2^n > 10n$成立。

Solution. 因为$n > 5$，则n最小取到$n = 6$，此时有$2^6 = 64 > 60 = 6 * 10$
使用最小反例法，因为$2^n > 10n$并非对于所有的$n > 5$都满足，那么一定存在$n = k$使得$2^n > 10n$不成立且k 最小
在这里$n = k$时成立，$n = k - 1$时不成立
所以说$2^{k-1} > 10(k - 1)$，$2^k < 10k$
然而$2^k - 2^{k-1} = 2^{k-1} \geq 64 > 10 = 10k - 10(k - 1)$
这与我们的假设矛盾，所以说对于所有的$n > 5$都满足$2^n > 10n$
得证 □

(c) 强数学归纳法：令序列$\{a_i\}$满足

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_1 = 2, \\ a_2 = 3, \\ a_k = a_{k-1} + a_{k-2} + a_{k-3}, \quad \forall k \geq 3, \end{cases}$$

证明$\forall n \in \mathbb{N}$，有$a_n \leq 2^n$。

Solution. 使用强数学归纳法，对于$k=3$，有$a_3 = a_0 + a_1 + a_2 = 1+2+3 = 6 < 2^3 = 8$
我们假定对于$n \geq 3$，对于所有的$3 \leq k < n$，都有$a_k \leq 2^k$
那么一定有$a_{k-1} < 2^{k-1}, a_{k-2} < 2^{k-2}, a_{k-3} < 2^{k-3}$
所以$a_k < 2^{k-1} + 2^{k-2} + 2^{k-3} < 2^k$
得证 $\square$