Lab08-Logic Calculus

CS101-计算机科学导论课后作业，讲师：高晓沨，2016 秋季学期

姓名：陆浩然　学号：516072910082　班级：F1607204

1. 利用Table 1中的真值表，分别求出命题A和B的主析取范式和主合取范式，并分别以符号m和M来表示。

Table 1: 命题真值表

P	Q	A	B
F	F	T	T
F	T	T	F
T	F	T	F
T	T	F	T

Solution.

(a) A的式子

i. A的主合取范式
有一个成假赋值，由$(P, Q) = (1, 1)$，$A = 0$可写出：
$\neg P \vee \neg Q$
显然，这已是主合取范式，写为标准形式：
M_{11}

ii. A的主析取范式
有三个成真赋值，由$(P, Q) = (1.0), (P, Q) = (0.0), (P, Q) = (0, 1)$，$A = 1$可写出：
$(P \wedge \neg Q); (\neg P \wedge \neg Q); (\neg P \wedge Q)$
写为主析取范式：
$m_{00} \vee m_{01} \vee m_{10}$

(b) B的式子

i. B的主合取范式：
有两个成假赋值，由$(P, Q) = (1, 0), (P, Q) = (0, 1)$，$A = 0$可写出：
$(\neg P \vee Q); (P \vee \neg Q)$
写为主合取范式：
$M_{10} \wedge M_{01}$

ii. B的主析取范式：
有两个成真赋值，由$(P, Q) = (0, 0), (P, Q) = (1, 1)$，$A = 1$可得出：
$(\neg P \wedge \neg Q); (P \wedge Q)$
写为主合取范式：
$m_{00} \vee m_{11}$

□

2. 给出下列公式的合取范式、析取范式、主合取范式和主析取范式：

(a) $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$

(b) $P \leftrightarrow (Q \rightarrow (Q \rightarrow P))$

Solution.

(a) $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$

i. 合取范式及主合取范式：

$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$

$= (P \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)) \wedge (Q \vee (\neg P \wedge Q \wedge R))$ （分配律）

$= ((P \vee \neg P) \wedge (P \vee Q) \wedge (P \vee R)) \wedge ((Q \vee \neg P) \wedge Q \wedge (Q \vee R))$ （分配律）

$= (P \vee Q) \wedge (P \vee R) \wedge (Q \vee \neg P) \wedge Q \wedge (Q \vee R)$ （去除永真式）

至此，已是合取范式，再求主合取范式：

$= (P\vee Q\vee R)\wedge(P\vee Q\vee\neg R)\wedge(P\vee Q\vee R)\wedge(P\vee\neg Q\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee\neg R)\wedge$
$(P\vee Q\vee R)\wedge(P\vee Q\vee\neg R)\wedge(\neg P\vee Q\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\neg R)\wedge(P\vee Q\vee R)\wedge(\neg P\vee Q\vee R)$
(分配律)

$= M_{101} \wedge M_{100} \wedge M_{010} \wedge M_{001} \wedge M_{000}$

ii. 析取范式及主析取范式：

首先，其本身就是析取范式，下写出其主析取范式：

$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$

$= ((P \wedge Q) \wedge (R \vee \neg R)) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$ （分配律）

$= (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$ （分配律）

$= m_{111} \vee m_{110} \vee m_{011}$

(b) $P \leftrightarrow (Q \to (Q \to P))$

先作基本化简：$Q \to (\neg Q \to P)$

$= \neg Q \vee (\neg Q \vee P)$ （等值公式）

$= \neg Q \vee P$ （结合律）

i. 合取范式及主合取范式：

$P \leftrightarrow (Q \to (Q \to P))$

$= (P \vee \neg(\neg Q \vee P) \wedge (\neg P \vee (\neg Q \vee P)))$ （等值公式）

$= (P \vee (Q \wedge \neg P)) \wedge (T)$ （德摩根律）

$= (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg P)$ （分配律）

$= (P \vee Q)$

$= M_{00}$

至此，该式既是合取范式又是主合取范式。

ii. 析取范式及主析取范式：

$P \leftrightarrow (Q \to (Q \to P))$

$= (P \wedge (\neg Q \vee P)) \vee (\neg P \wedge \neg(\neg Q \vee P))$ （等值公式）

$= (P \wedge \neg Q) \vee P \vee (\neg P \wedge Q)$ （德摩根律，分配律）

至此，已是析取范式。

$= (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge (Q \vee \neg Q))$ （分配律）

$= (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$ （分配律）

$= (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge Q)$

$= m_{10} \vee m_{01} \vee m_{11}$

这就是主析取范式。

□

3. 使用推理规则证明：

(a) $P \to (Q \to S)$，$\neg R \vee P$，$Q \vdash R \to S$

(b) $\neg(P \to Q) \to \neg(R \vee S)$，$(Q \to P) \vee \neg R$，$R \vdash P \leftrightarrow Q$

Solution.

(a) (1)$\neg R \vee P$ （前提引入）

(2)$R \to P$ （置换规则）

(3)$P \to (Q \to S)$ （前提引入）

(4)$R \to (Q \to S)$ （分离(2)(3)）

(5)Q （前提引入）

(6)$Q \wedge R \to (Q \to S)$ （结论引入）

(7)$Q \wedge (\neg R \vee (\neg Q \vee S))$ （置换规则）

(8)$(Q \vee \neg R) \wedge (Q \vee S)$ （置换规则）

(9)$Q \wedge (\neg R \vee S)$ （置换规则）

(10)$Q \wedge (R \to S)$ （置换规则）

(11)$R \to S$ （代入规则）

(b) (1)$(Q \to P) \vee \neg R$ （前提引入）

(2)$\neg R \vee (Q \to P)$ （置换规则）

(3)$R \to (Q \to P)$ （置换规则）

(4)R （前提引入）

(5)$Q \to P$ （分离(3)(4)）

(6)$\neg(P \to Q) \to \neg(R \vee S)$ （前提引入）

(7)$(\neg P \vee Q) \vee (\neg R \wedge \neg S)$ （置换规则）

(8)$(\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg S)$ （置换规则）

(9)$(\neg R \vee (\neg P \vee Q)) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg S)$ （置换规则）

(10)$(R \to (P \to Q)) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg S)$ （置换规则）

(11)$R \to (P \to Q)$ （代入规则）

(12)$P \to Q$ （分离(4)(11)）

(13)$P \leftrightarrow Q$ （分离(5)(12)）

$\square$