

# Lab08-Logic Calculus

CS101-计算机科学导论课后作业，讲师：高晓汎，2016 秋季学期

\* 可打印本页直接在页面作答/附纸装订。标注您的 姓名：陈润峰 学号：516021910007 班级：F1607103  
\* 电子版作业请直接上传到课程网站

1. 利用Table 1中的真值表，分别求出命题A和B的主析取范式和主合取范式，并分别以符号m和M来表示。

Table 1: 命题真值表

$P$	$Q$	$A$	$B$
$F$	$F$	$T$	$T$
$F$	$T$	$T$	$F$
$T$	$F$	$T$	$F$
$T$	$T$	$F$	$T$

## Solution. 1

(a) 与A有关的：

- 主析取范式： $(\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) = m_{00} \vee m_{01} \vee m_{10}$
- 主合取范式： $\neg P \vee \neg Q = M_{11}$

(b) 与B有关的：

- 主析取范式： $(\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q) = m_{00} \vee m_{11}$
- 主合取范式： $(P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q) = M_{01} \wedge M_{10}$

2. 给出下列公式的合取范式、析取范式、主合取范式和主析取范式：

(a)  $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$

(b)  $P \leftrightarrow (Q \rightarrow (Q \rightarrow P))$

## Solution. 2

(a)  $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$

- 合取范式： $(\neg P \vee Q) \wedge (Q \vee P) \wedge Q \wedge (R \vee P) \wedge (R \vee Q)$   
化简得： $Q \wedge (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$
- 析取范式： $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$
- 主合取范式：
  - $Q = Q \vee (\neg P \wedge P) \vee (\neg R \wedge R)$   
 $= (Q \vee \neg P) \wedge (Q \vee P) \vee (\neg R \wedge R)$   
 $= (((Q \vee \neg P) \wedge (Q \vee P)) \vee \neg R) \wedge (((Q \vee \neg P) \wedge (Q \vee P)) \vee R)$   
 $= (Q \vee \neg P \vee \neg R) \wedge (Q \vee P \vee \neg R) \wedge (Q \vee \neg P \vee R) \wedge (Q \vee P \vee R)$
  - $P \vee R = (P \vee R) \vee (\neg Q \wedge Q)$   
 $= (P \vee R \vee \neg Q) \wedge (P \vee R \vee Q)$

$$\begin{aligned} \text{iii. } Q \vee R &= (Q \vee R) \vee (\neg P \wedge P) \\ &= (Q \vee R \vee \neg P) \wedge (Q \vee R \vee P) \end{aligned}$$

iv. 消去相同的项, 于是

$$\begin{aligned} &(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \\ &= (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \end{aligned}$$

• 主析取范式:

$$\begin{aligned} \text{i. } P \wedge Q &= (P \wedge Q) \wedge (\neg R \vee R) \\ &= (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \end{aligned}$$

ii. 消去相同的项, 于是

$$\begin{aligned} &(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \\ &= (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \end{aligned}$$

(b)  $P \leftrightarrow (Q \rightarrow (Q \rightarrow P))$

• 合取范式:

i. 依据等值公式, 有

$$\begin{aligned} P \leftrightarrow (Q \rightarrow (Q \rightarrow P)) &= P \leftrightarrow (Q \rightarrow (\neg Q \vee P)) \\ &= P \leftrightarrow (\neg Q \vee (\neg Q \vee P)) \\ &= P \leftrightarrow (\neg Q \vee P) \\ &= (P \vee \neg(\neg Q \vee P)) \wedge (\neg P \vee (\neg Q \vee P)) \\ &= (P \vee (\neg\neg Q \wedge \neg P)) \wedge (\neg P \vee P \vee \neg Q) \\ &= (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg P) \wedge (\neg P \vee P \vee \neg Q) \end{aligned}$$

ii. 化简得

$$\begin{aligned} P \leftrightarrow (Q \rightarrow (Q \rightarrow P)) &= P \vee Q \end{aligned}$$

• 析取范式:

i. 依据等值公式, 有

$$\begin{aligned} P \leftrightarrow (Q \rightarrow (Q \rightarrow P)) &= P \leftrightarrow (Q \rightarrow (\neg Q \vee P)) \\ &= P \leftrightarrow (\neg Q \vee (\neg Q \vee P)) \\ &= P \leftrightarrow (\neg Q \vee P) \\ &= (P \wedge (\neg Q \vee P)) \vee (\neg P \wedge \neg(\neg Q \vee P)) \\ &= (P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge P) \vee (\neg P \wedge (\neg\neg Q \wedge \neg P)) \\ &= (P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge P) \vee (\neg P \wedge \neg P \wedge Q) \end{aligned}$$

ii. 化简得

$$\begin{aligned} P \leftrightarrow (Q \rightarrow (Q \rightarrow P)) &= (P \wedge \neg Q) \vee P \vee (\neg P \wedge Q) \end{aligned}$$

• 主合取范式:

$$\begin{aligned} P \leftrightarrow (Q \rightarrow (Q \rightarrow P)) &= P \vee Q \end{aligned}$$

• 主析取范式:

$$\begin{aligned} \text{i. } P &= P \wedge (\neg Q \vee Q) \\ &= (P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q) \end{aligned}$$

ii. 消去相同的项, 于是

$$\begin{aligned} P \leftrightarrow (Q \rightarrow (Q \rightarrow P)) &= (P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q) \end{aligned}$$

3. 使用推理规则证明:

(a)  $P \rightarrow (Q \rightarrow S), \neg R \vee P, Q \vdash R \rightarrow S$

(b)  $\neg(P \rightarrow Q) \rightarrow \neg(R \vee S), (Q \rightarrow P) \vee \neg R, R \vdash P \leftrightarrow Q$

**Solution. 3**

(a) 证明过程如下:

i. $\neg R \vee P$	前提引入
ii. $R \rightarrow P$	等值公式
iii. $P \rightarrow (Q \rightarrow S)$	前提引入
iv. $R \rightarrow (Q \rightarrow S)$	(ii) (iii) 三段论
v. $\neg R \vee \neg Q \vee S$	等值公式
vi. $Q$	前提引入
vii. $\neg R \vee S$	(v) (vi) 分离
viii. $R \rightarrow S$	等值公式

(b) 证明过程如下:

i. $R$	前提引入
ii. $(Q \rightarrow P) \vee \neg R$	前提引入
iii. $Q \rightarrow P$	(i) (ii) 分离
iv. $R$	前提引入
v. $R \vee S$	( $I_3$ ) 公式
vi. $\neg(P \rightarrow Q) \rightarrow \neg(R \vee S)$	前提引入
vii. $P \rightarrow Q$	假结论前提必假
viii. $Q \rightarrow P$	(iii) 结论引用
ix. $P \leftrightarrow Q$	( $I_{14}$ ) 公式