Lab09-Predicate Logic

CS101-计算机科学导论课后作业，讲师：高晓沨，2016 秋季学期

$*$ 可打印本页直接在页面作答/附纸装订。标注您的 姓名：王明璋 学号：516071910071 班级：F1607103

$*$ 电子版作业请直接上传到课程网站

1. 将下列语句符号化:

   (a) 过平面上两个点, 有且只有一条直线通过。

   (b) 如果明天天气好, 有些同学将去香山。

   Solution.

   (a) 令$P(x)$、$L(x)$、$R(x,y,z)$、$E(x,y)$分别为语句“x是平面上一点”、“x是平面上一条直线”、“z通过x和y”和“x和y相同”，则题中语句可符号化为

   $$(\forall x)(\forall y)(P(x) \wedge P(y) \wedge \neg E(x,y)) \rightarrow (\exists z)(L(z) \wedge R(x,y,z) \wedge (\forall w)(L(w) \wedge R(x,y,w) \rightarrow E(z,w)))$$

   (b) 令P、$S(x)$、$G(x)$分别为语句“明天天气好”、“x是学生”和“x去香山”，则题中语句可符号化为

   $$P \rightarrow (\exists x)(S(x) \wedge G(x))$$

   □

2. 令$P(x)$、$Q(x)$和$R(x)$分别为语句“x是教授”、“x无知”和“x爱虚荣”，用量词、逻辑联接词和$P(x)$、$Q(x)$和$R(x)$表示下列语句。假定论域是所有人的集合。

   (a) 没有无知的教授。

   (b) 所有无知者均爱虚荣。

   (c) 没有爱虚荣的教授。

   Solution.

   (a) $(\forall x)(P(x) \rightarrow \neg Q(x))$.

   (b) $(\forall x)(Q(x) \rightarrow R(x))$.

   (c) $(\forall x)(P(x) \rightarrow \neg R(x))$.

   □

3. 给定解释I如下：

   (1) 个体域为$D = \{-2, 3, 6\}$;

   (2) $F(x)$表示“$x \leq 3$”，$G(x)$表示“$x > 5$”，$R(x)$表示“$x \leq 7$”。

   在解释I下，求下列各式的真值：

   (a) $\forall x(F(x) \wedge G(x))$.

   (b) $\forall x(R(x) \rightarrow F(x)) \vee G(5)$.

   (c) $\exists x(F(x) \vee G(x))$.

Solution.

(a) $\forall x(F(x) \wedge G(x))$在解释$I$下为假。
因为存在$x = 6$使$F(x)$为假，
从而$F(x) \wedge G(x)$为假，
进而$\forall x(F(x) \wedge G(x))$ 为假。

(b) $\forall x(R(x) \to F(x)) \vee G(5)$在解释$I$下为假。
因为存在$x = 6$使$F(x)$为假而$R(x)$为真，
从而$R(x) \to F(x)$为假，
进而$\forall x(R(x) \to F(x))$为假，
又$G(5)$为假，
所以$\forall x(R(x) \to F(x)) \vee G(5)$ 为假。

(c) $\exists x(F(x) \vee G(x))$在解释$I$下为真。
因为存在$x = 6$使$G(x)$为真，
从而$F(x) \vee G(x)$为真，
进而$\exists x(F(x) \vee G(x))$为真。

□

4. 证明$\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$ 和$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ 不是逻辑等价的。

Solution. 如果$\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$ 和$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ 是逻辑等价的，那么对任何解释I，它们应该有相同的真值。
给定解释I如下：

(1) 个体域为$D = \mathbb{R}$;

(2) $P(x)$表示“$x = 1$”，$Q(x)$表示“$x = 2$”。

在该解释下，$\exists x P(x)$和$\exists x Q(x)$均为真，从而$\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$也为真。
但是，$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$为假，因为不存在$x \in \mathbb{R}$使得$P(x)$与$Q(x)$同时成立。
所以，$\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$ 和$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ 不是逻辑等价的。 □