Lab10-Graph Theory

CS101-计算机科学导论课后作业，讲师：高晓沨，2016 秋季学期

∗ 可打印本页直接在页面作答/附纸装订。标注您的　姓名：文丽　学号：516072910067　班级：F1607204

∗ 电子版作业请直接上传到课程网站

1. 试证明：非空简单图中一定存在度相同的点。

   Solution. 证明：
   若非空简单图中无孤立结点，则对$n(n > 1)$个结点的简单图，其中各点$d(v)$的取值范围为1到$n-1$，由抽屉原理，一定存在两个度相同的点。
   若非空简单图中存在一个孤立结点，则对$n(n > 2)$个结点的简单图，其中除此孤立结点外的各点不能与自身和此孤立结点相连接，$d(v)$的取值范围为1到$n-2$，由抽屉原理，一定存在两个度相同的点。特别的，此情况下，当$n = 2$时，必为两个孤立结点。
   若非空简单图中存在多个孤立结点，类似可证。

2. 无向图G_1和G_2分别如Fig. 1和Fig. 2所示。请分别画出图G_1和G_2的并、交、对称差，以及G_1的补图。

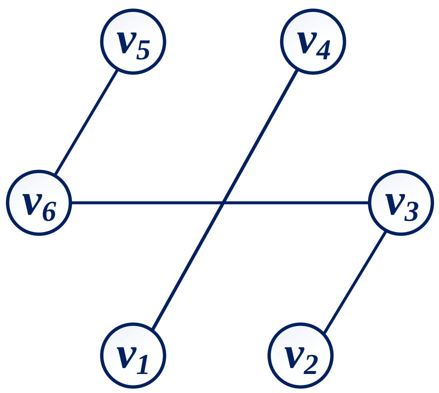

Figure 1: 无向图G_1

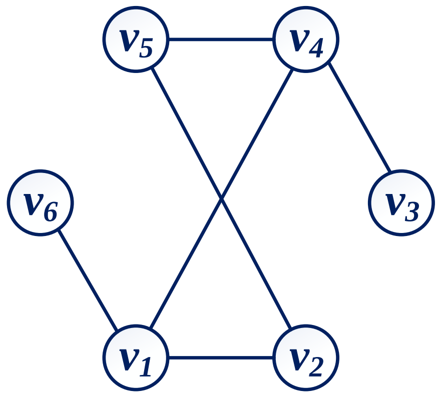

Figure 2: 无向图G_2

Solution. 各图如下所示：

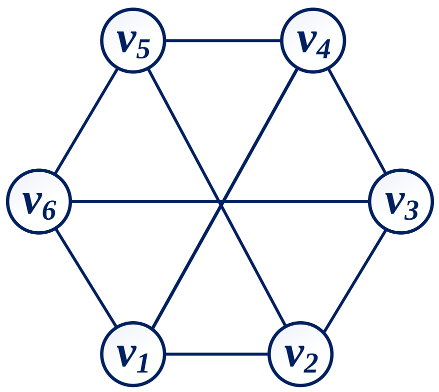

Figure 3: G_1与G_2的并

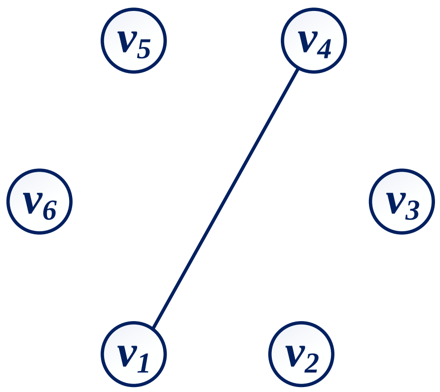

Figure 4: G_1与G_2的交

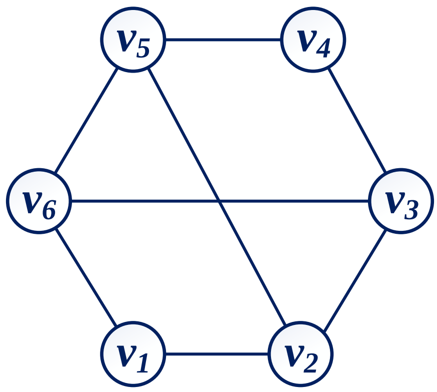

Figure 5: G_1与G_2的对称差

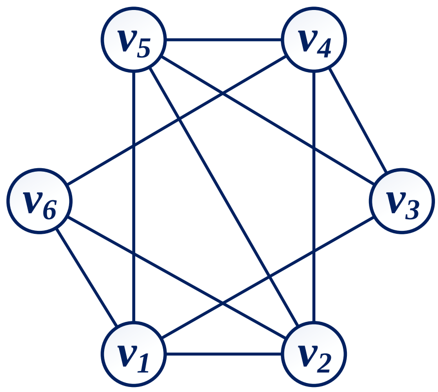

Figure 6: G_1的补图

3. 完全图的每边任给一个方向，称为竞赛图。证明在竞赛图中：

$$\sum_{v_i \in V} (d^-(v_i))^2 = \sum_{v_i \in V} (d^+(v_i))^2$$

Solution. 在完全图K_n中，每点的度数$d(v)$为$n-1$，所以对每点都有

$$d^-(v_i) = (n-1) - d^+(v_i)$$

即

$$(d^-(v_i))^2 = (n-1)^2 + (d^+(v_i))^2 - 2(n-1)d^+(v_i)$$

对该式求和得到：

$$\sum_{v_i \in V} (d^-(v_i))^2 = \sum_{v_i \in V} (d^+(v_i))^2 + n(n-1)^2 - 2(n-1) \sum_{v_i \in V} d^+(v_i)$$

对有向图：

$$\sum_{v_i \in V} d^+(v_i) = |E|$$

且对完全图：

$$|E| = \frac{n(n-1)}{2}$$

所以

$$n(n-1)^2 - 2(n-1) \sum_{v_i \in V} d^+(v_i) = 0$$

即：

$$\sum_{v_i \in V} (d^-(v_i))^2 = \sum_{v_i \in V} (d^+(v_i))^2$$

4. 6个人围成圆形就座，每个人恰好只与相邻者不认识。请问是否可以重新入座，使每个人都与邻座认识？

Solution. 假设6个人为6个点v_1，v_2，v_3，v_4，v_5，v_6，若两人相互认识，则用一条边连接两点。由于就座后每个人恰好只与相领者不认识，则六人间的认识关系可用简单图Fig. 7表示。找到重新入座的方式使得每个人都与领座认识可等价为找到一条路径，该路径从v_1开

始依次进出各点，且不重复通过同一个点，最终回到v_1。存在这样的一条路径如Fig. 8所示。

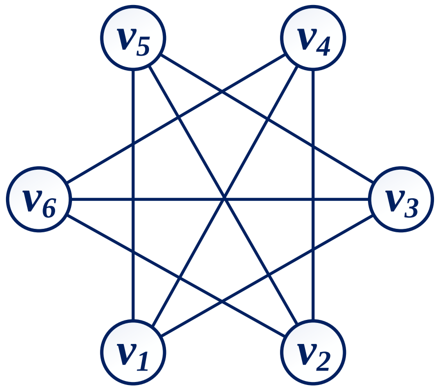

Figure 7: 六人间认识关系

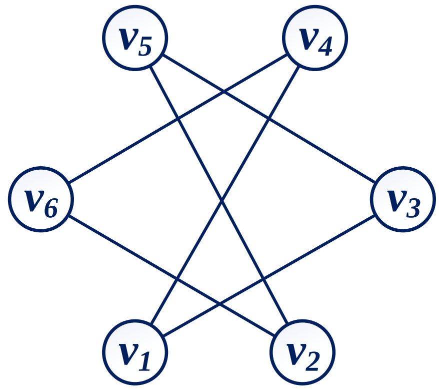

Figure 8: 重排路径

综合上述，如果6个人之前圆形就座的位置为Fig. 9，每个人恰好只与相邻者不认识，则可以找到重新入座的方式如Fig. 10，使得每个人都与领座认识。

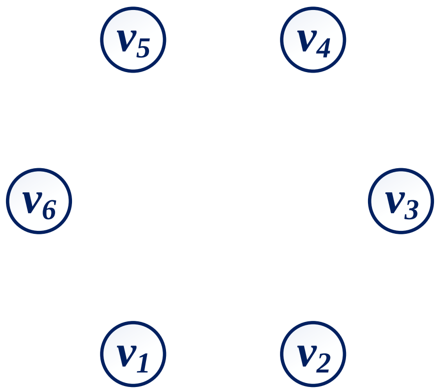

Figure 9: 之前的就座位置

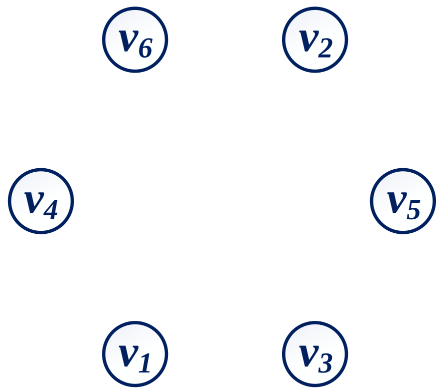

Figure 10: 重排后的位置