Lab10-Graph Theory

CS101-计算机科学导论课后作业，讲师：高晓沨，2016 秋季学期

∗ 可打印本页直接在页面作答/附纸装订。标注您的 姓名：__徐逸凡___ 学号：__516071910074___ 班级：__F1607103____

∗ 电子版作业请直接上传到课程网站

1. 试证明：非空简单图中一定存在度相同的点。

   Solution.

   证明：
   设n个顶点为$v_1, \cdots, v_n$，$0 \le d(v_i) \le n-1 (i = 1, \cdots, n)$
   若$\exists d(v_i) = n-1$，即存在某个顶点与剩下的$n-1$个顶点均相连，则$\forall 1 \le i \le n, d(v_i) \ne 0$，$d(v_1), \cdots, d(v_n)$在$1, 2, \cdots, n-1$这$n-1$个数中取，由鸽笼原理知，必然$\exists i \ne j, 1 \le i, j \le n$，使得$d(v_i) = d(v_j)$。
   若$\exists d(v_i) = 0$，即存在某个顶点与剩下的$n-1$个顶点均不相连，则$\forall 1 \le i \le n, d(v_i) \ne n-1$，$d(v_1), \cdots, d(v_n)$在$0, 1, \cdots, n-2$这$n-1$个数中取，由鸽笼原理知，必然$\exists i \ne j, 1 \le i, j \le n$，使得$d(v_i) = d(v_j)$。
   综上，非空简单图中一定存在度相同的点。 □

2. 无向图G_1和G_2分别如Fig. 1和Fig. 2所示。请分别画出图G_1和G_2的并、交、对称差，以及G_1的补图。

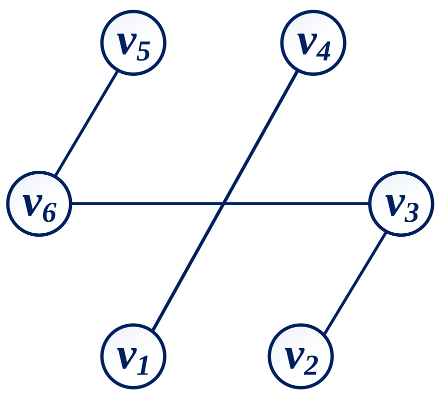

Figure 1: 无向图G_1

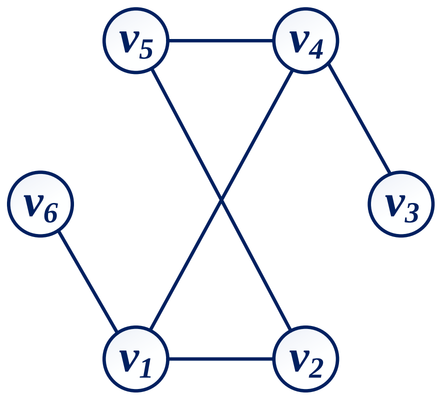

Figure 2: 无向图G_2

Solution.

Fig. 3为图G_1和G_2的并，Fig. 4为图G_1和G_2的交，Fig. 5为图G_1和G_2的对称差，Fig. 6为G_1的补图。 □

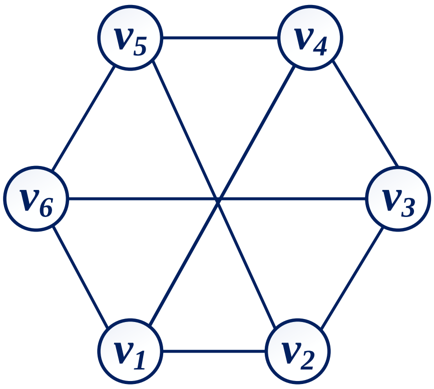

Figure 3: $G_1 \cup G_2$

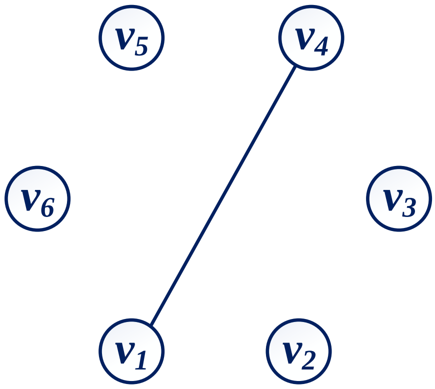

Figure 4: $G_1 \cap G_2$

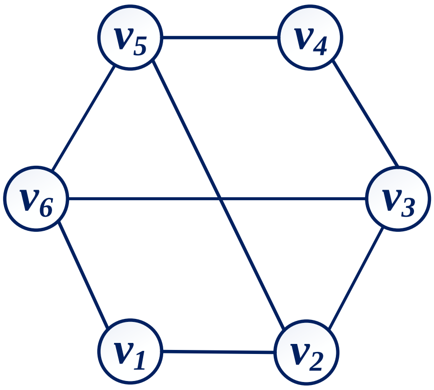

Figure 5: $G_1 \oplus G_2$

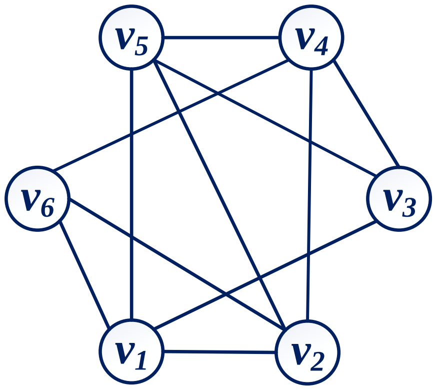

Figure 6: $\overline{G_1}$

3. 完全图的每边任给一个方向，称为竞赛图。证明在竞赛图中：

$$\sum_{v_i \in V} (d^-(v_i))^2 = \sum_{v_i \in V} (d^+(v_i))^2$$

Solution.

证明：
由于G为竞赛图，对$\forall v_i \in V$都有$d^-(v_i)+d^+(v_i)=n-1$，并且
$\sum\limits_{i=1}^{n}(d^-(v_i))=\sum_{i=1}^{n}(d^+(v_i))=\frac{n(n-1)}{2}$
则有
$\sum\limits_{i=1}^{n}(d^-(v_i))^2=\sum\limits_{i=1}^{n}(n-1-d^+(v_i))^2=\sum\limits_{i=1}^{n}\left[(n-1)^2-2(n-1)(d^+(v_i))+(d^+(v_i))^2\right]$
$=n(n-1)^2-2(n-1)\sum\limits_{i=1}^{n}(d^+(v_i))+\sum\limits_{i=1}^{n}(d^+(v_i))^2=n(n-1)^2-2(n-1)\frac{n(n-1)}{2}+\sum\limits_{i=1}^{n}(d^+(v_i))^2$
$=\sum\limits_{i=1}^{n}(d^+(v_i))^2$
即
$\sum\limits_{v_i\in V}(d^-(v_i))^2=\sum\limits_{v_i\in V}(d^+(v_i))^2$ □

4. 6个人围成圆形就座，每个人恰好只与相邻者不认识。请问是否可以重新入座，使每个人都与邻座认识？

Solution.
可以。给六个人标号，若两个人认识就在彼此之间画一条直线。最初就坐情况如Fig. 7所示,重新入座后就坐情况如Fig. 8所示。因此可以满足重新入座后使每个人都与邻座认识。 □

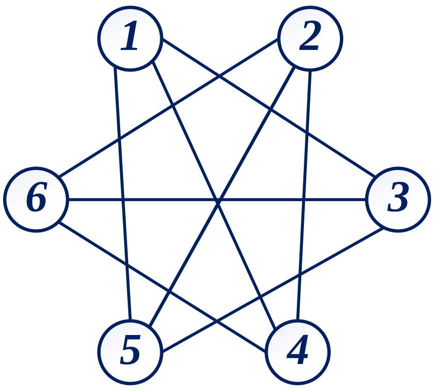

Figure 7: 开始时的就坐情况

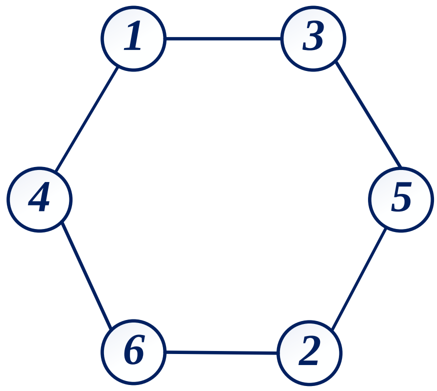

Figure 8: 重新入座后的就坐情况