Lab10-Graph Theory

CS101-计算机科学导论课后作业，讲师：高晓沨，2016 秋季学期

$*$ 可打印本页直接在页面作答/附纸装订。标注您的 姓名：张颖 学号：516010910070 班级：F1607103

$*$ 电子版作业请直接上传到课程网站

1. 试证明：非空简单图中一定存在度相同的点。

Solution. 在一个n阶非空简单图中，考虑一个点的度的可能性。最少为0，最多为n-1。

(a) 若不存在度为0的点，则度的可能性只有n-1种，而图中有n个点，由抽屉原理知至少存在度相同的两点，命题成立；

(b) 若存在一个点的度为0，则去掉这个点考虑余下的n-1 阶子图，在子图中若不存在度为0的点，则又由抽屉原理知至少存在度相同的两点，命题成立；若存在一个点的度为0，则在原n阶图中，这个点与之前去掉的点的度相同，命题仍成立。

□

2. 无向图G_1和G_2分别如Fig. 7和Fig. 6所示。请分别画出图G_1和G_2的并、交、对称差，以及G_1的补图。

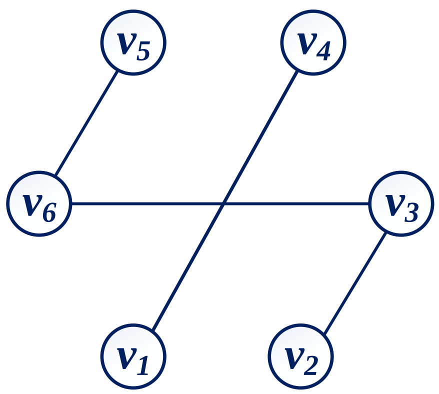

Figure 1: 无向图G_1

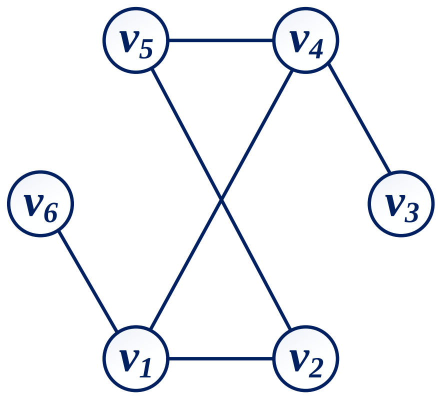

Figure 2: 无向图G_2

Solution. □

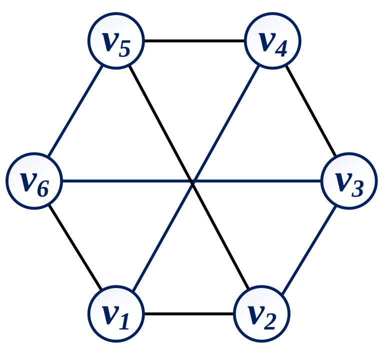

Figure 3: 无向图G_1和G_2的并

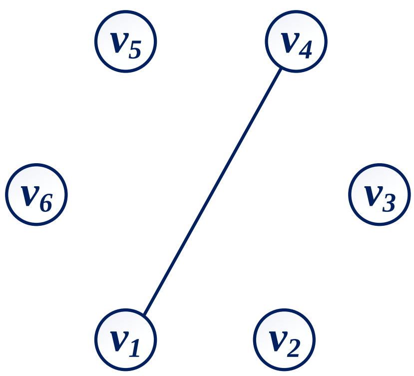

Figure 4: 无向图G_1和G_2的交

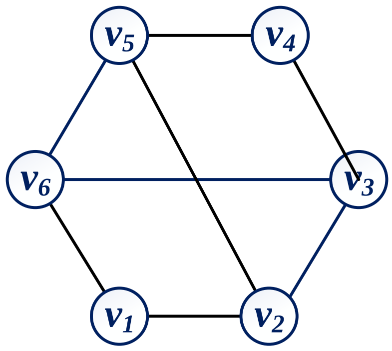

Figure 5: 无向图G_1和G_2的对称差

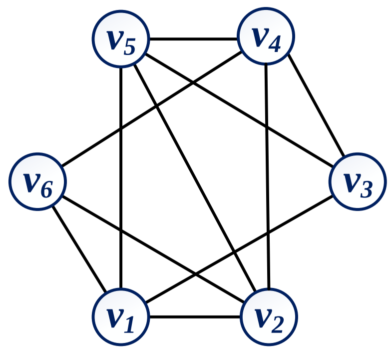

Figure 6: 无向图G_1的补图

3. 完全图的每边任给一个方向，称为竞赛图。证明在竞赛图中：

$$\sum_{v_i \in V}(d^{-}(v_i))^2 = \sum_{v_i \in V}(d^{+}(v_i))^2$$

Solution.

$$\sum_{v_i \in V}(d^{-}(v_i))^2 - \sum_{v_i \in V}(d^{+}(v_i))^2 = \sum_{v_i \in V}((d^{-}(v_i))^2 - (d^{+}(v_i))^2) = \sum_{v_i \in V}(d^{-}(v_i) - d^{+}(v_i))(d^{-}(v_i) + d^{+}(v_i))$$

因为n阶竞赛图中，每个点的入度与出度之和为n-1，所以

$$\sum_{v_i \in V}(d^{-}(v_i) - d^{+}(v_i))(d^{-}(v_i) + d^{+}(v_i)) = (n-1)\sum_{v_i \in V}((d^{-}(v_i) - d^{+}(v_i)) = (n-1)(\sum_{v_i \in V}(d^{-}(v_i)) - \sum_{v_i \in V}(d^{+}(v_i)))$$

又因为n阶竞赛图中出度之和等于入度之和

$$\sum_{v_i \in V}(d^{-}(v_i)) = \sum_{v_i \in V}(d^{+}(v_i))$$

所以

$$\sum_{v_i \in V}(d^{-}(v_i))^2 - \sum_{v_i \in V}(d^{+}(v_i))^2 = 0$$

□

4. 6个人围成圆形就座，每个人恰好只与相邻者不认识。请问是否可以重新入座，使每个人都与邻座认识？

Solution. 构造一个图G，图G有6个顶点$v_1, v_2, \cdots, v_6$，每个顶点代表一个人，将顶点按如下规则连线：若两人认识，则连实线；若两人不认识，则不连线，可得一个6阶简单图图7。重新入座，使每个人都与邻座认识即等价于从某个顶点出发可画出一条线经过所有顶点最后回到v_1且不重复经过顶点与边（最后回到v_1 不算重复）。则按$v_1, v_3, v_5, v_2, v_4, v_6, v_1$的顺序连线即可知存在这样的一条线，所以可以重新入座使每个人都与邻座认识。

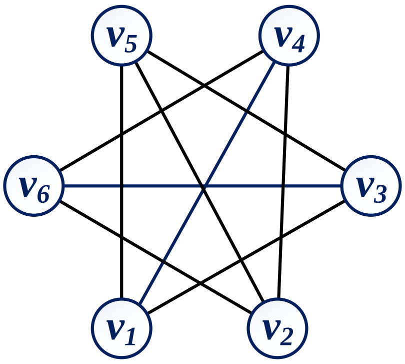

Figure 7: 图7

$\square$