Lab11-Path and Cycle

CS101-计算机科学导论课后作业，讲师：高晓沨，2016 秋季学期

∗ 可打印本页直接在页面作答/附纸装订。标注您的 姓名：胡俊鹏 学号：516071910061 班级：F1607103

∗ 电子版作业请直接上传到课程网站

1. 完全图 K_n 有多少条初级回路？包含其中某条边 e 的初级回路有多少条？

Solution.

(a) 每条初级回路的长度从 3 取到 n。对长度为 k 的初级回路，其中有 k 个点，于是取法有 A_n^k 种 $(k = 3, 4, \cdots, n)$。
在取的过程中，从某一点起，每条初级回路正反取了两次，而由于有 k 个点轮换对称，又重复了 k 次，故真正的初级回路有 $\frac{A_n^k}{2k}$ 条，于是初级回路总数为：

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{A_n^k}{2k}$$

(b) 固定该边及其两个端点，则可从剩下 $n-2$ 个点中取出 k 个点及相应边，与之组成初级回路，有 A_{n-2}^k 种 $(k = 1, 2, \cdots, n-2)$。
故初级回路总数为：

$$\sum_{k=1}^{n-2} A_{n-2}^k$$

□

2. 设 G 是不存在三角形的简单图，证明：

(a) $\sum\limits_{i=1}^{n} d^2(v_i) \le mn.$

(b) $m \le \dfrac{n^2}{4}.$

Solution.

(a) 设边 e 的两个顶点为 v_i，v_j，由于 v_i 和 v_j 不能与同一点相邻，
所以 $d(v_i) - 1 + d(v_j) - 1 \le n - 2$，即 $d(v_i) + d(v_j) \le n$。
否则，由抽屉原理 v_i 和 v_j 会与同一点相邻。

$$\sum_{i=1}^{n} d^2(v_i) = \sum_{e\in E} (d(v_i) + d(v_j)) \le \sum_{e\in E} n = mn$$

(b) 由数学不等式知识有：

$$(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} d(v_i)}{n})^2 \le \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} d(v_i)^2}{n} \le m$$
$$\Rightarrow \frac{(2m)^2}{n^2} \le m$$
$$\Rightarrow m \le \frac{n^2}{4}$$

□

3. 证明：若连通图中的最长道路不唯一，则它们必定相交。

Solution.

用反证法，假设两条最长道路分别为 Γ_i, Γ_j，Γ_i, Γ_j 不相交，长度为 k。
由于是连通图，必存在一条路同时与 Γ_i, Γ_j 相交，不妨设分别交于 v_{i_1}, v_{j_1}，该条路在 v_{i_1}, v_{j_1} 中至少存在一个点，设 v_{i_1} 到 v_{j_1} 的这部分为 Γ_p。
v_{i_1} 将 Γ_i 分为两部分，取其中顶点数目多的一部分 Γ_{i_1}，则其点数 $|V_{i_1}| \geq \frac{k}{2}$。
同理，取出 $\Gamma_{j_1}, |V_{j_1}| \geq \frac{k}{2}$。
于是我们得到一条路：$\Gamma_{i_1} \cup \Gamma_{j_1} \cup \Gamma_p$，其长度大于等于 $k+1$，这与假设矛盾。
故假设不成立，若连通图中的最长道路不唯一，则它们必定相交。 □