Lab11-Path and Cycle

CS101-计算机科学导论课后作业，讲师：高晓沨，2016 秋季学期

∗ 可打印本页直接在页面作答/附纸装订。标注您的 姓名：冯润康quad 学号：516071910060quad 班级：F167103
∗ 电子版作业请直接上传到课程网站

1. 完全图K_n有多少条初级回路？包含其中某条边e的初级回路有多少条？

Solution.

(a) 考虑完全图K_n的含k个顶点的初级回路，其中$3 \leq k \leq n$
由于完全图K_n中任意两点都有边相连，故而含k个顶点的初级回路相当于在n个顶点中任选k个进行圆排列
且考虑图是无向的，从而确定的k个点的初级回路有$\frac{(k-1)!}{2}$
知含有k个顶点的初级回路有$\frac{C_n^k(k-1)!}{2}$
故而完全图K_n有的初级回路条数为$\sum\limits_{k=3}^{n} \frac{C_n^k(k-1)!}{2}$

(b) 对于确定某条边e的完全图K_n中的初级回路的条数
相当于求K_{n-2}中的初级道路的条数的两倍
这是因为将完全图K_n删去e的两个端点v_1,v_2的$n-2$阶子图为K_{n-2}
对于$n-2$阶子图的任意一条初级道路，使得其首尾端点分别于v_1,v_2相连
则其是对应两条完全图K_n中含e的初级回路的
特别地，我们认为$n-2$阶子图的孤立点暂也称为一条初级道路
而$n-2$阶子图中含k个点的初级道路为$\frac{P_{n-2}^k}{2}$条
从而完全图K_n中含$n-2$阶子图中的k个点的初级道路和e的初级回路为P_{n-2}^k条
从而完全图K_n中含e的初级回路共有$\sum\limits_{k=1}^{n-2} P_{n-2}^k$条

□

2. 设G是不存在三角形的简单图，证明：

(a) $\sum\limits_{i=1}^{n} d^2(v_i) \leq mn.$

(b) $m \leq \frac{n^2}{4}.$

Solution.

(a) 首先不妨设G是连通图
否则对G的每个连通分支考虑即可
考虑使用调整法来证明问题
如果G_1中是存在奇圈的，设G_1中的最小奇圈P含有$2k+1$个点
显然$k > 1$,且知G_1中的最小奇圈含有$2k+1$个点之间是不存在连线的
否则若奇圈P内部有连线e，那么连线e将P分成的两部分中必有奇圈。
从而说明了G_1中的最小奇圈含有的$2k+1$个点之间是不存在连线的
考虑这$2k+1$个点中度数最小的点，设为v
设v在P相邻的点为v_1与v_2，再取P中与v不相邻的点v_3
考虑把G_1中的边vv_1和边vv_2，替换成v_1v_2和vv_3形成图G_2
考虑$d(v) \leq d(v_3)$,则$d(v)^2 + d(v_3)^2 \leq (d(v)+1)^2 + (d(v_3)-1)^2$

对于图G,定义$f(G)=\sum\limits_{i=1}^{n}d^2(v_i)$,其中$d(v_i)\in G$
则$f(G_1)\leq f(G_2)$
这说明了我们可以进行调整使得最小奇圈的长度变大的同时使得$f(G)$变大
但是由于最小奇圈长度是有上界的。
那么我们证明了，对于任意图G,一定存在一个不含奇圈的图G',使得$f(G)\leq f(G')$
由于图G不含奇圈当且仅当图G为二部图。
那么我们只需要证明对二部图G,满足$\sum\limits_{i=1}^{n}d^2(v_i)\leq mn$
定义“$\angle$”表示二部图中的某个点以及包括这个点的两条边形成的图形
那么在二部图中“$\angle$”的个数为$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{d(v_i)(d(v_i)-1)}{2}$
但由于二部图中的某条边e至多存在于$n-2$个“$\angle$”中，这是因为对于除掉e的两个顶点外的任意一点至多与e的一个顶点相连
那么二部图中“$\angle$”的个数至多为$\frac{m(n-2)}{2}$
从而$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{d(v_i)(d(v_i)-1)}{2}\leq\frac{m(n-2)}{2}$
又$\sum\limits_{i=1}^{n}d(v_i)=2m$
即$\sum\limits_{i=1}^{n}d^2(v_i)\leq mn$
其中取等G为任意完全二部图。

(b) 与(a)同理，对于任意的图G,其中图G中不含有三角形，
我们是可以找到图$G-$，使得图$G-$和图G具有相同的顶点数和边数。
那么同样的，对于(b)中的不等式，我们不妨设G是二部图。
考虑G的两部分分别含有k,$n-k$个顶点。
那么$m\leq k(n-k)\leq\frac{n^2}{4}$
从而对于任意的图G,其中图G中不含有三角形，有$m\leq\dfrac{n^2}{4}$.
其中取等G为任意完全二部图。

□

3. 证明：若连通图中的最长道路不唯一，则它们必定相交。

Solution.

使用反证法，若连通图中存在的最长道路不唯一，且它们不相交。
考虑连通图中的两条最长道路，设为:
$P_1=(v_1,e_{1_1},\cdots,v_{n-1},e_{1_{n-1}},v_n)$
$P_2=(u_1,e_{2_1},\cdots,u_{n-1},e_{2_{n-1}},u_n)$
由于这两条道路不相交，那么不存在$i.j$使得$v_i=u_j$
由于图是联通的，那么一定是存在k,l,使得v_k和u_l相连,设相连边为e。
考虑$P_3=(v_1,e_{1_1},\cdots,v_k,e,u_l,\cdots,u_{n-1},e_{2_{n-1}},u_n)$
$P_4=(u_1,e_{2_1},\cdots,u_l,e,v_k,\cdots,v_{n-1},e_{1_{n-1}},v_n)$
那么可知P_3,P_4两条道路的长度之和为$2n+2$
那么必有一条的长度大于n
但是这与联通图中最长道路长度为n矛盾。
故而，若连通图中的最长道路不唯一，则它们必定相交。

□