Lab11-Path and Cycle

CS101-计算机科学导论课后作业，讲师：高晓沨，2016 秋季学期

* 可打印本页直接在页面作答/附纸装订。标注您的　姓名：朱文唱　学号：516071910057　班级：F1607103
* 电子版作业请直接上传到课程网站

1. 完全图K_n有多少条初级回路？包含其中某条边e的初级回路有多少条？

Solution.

从n个点中取k个点，共有C_n^k种取法
当初级回路中包含k个顶点时，求回路的个数即是求这k个顶点的不同排列，故回路个数为：$\frac{1}{2}(k-1)!$
故完全图中初级回路的个数为：

$$\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{2}C_n^k(k-1)!$$

若包含某条边e，则从剩下的$n-2$个点中取点，此时相当于固定了起点与终点，故不再需要乘$\frac{1}{2}$，回路条数：

$$\sum_{k=1}^{n-2}C_{n-2}^k k!$$

□

2. 设G是不存在三角形的简单图，证明：

(a) $\sum\limits_{i=1}^{n} d^2(v_i) \le mn.$

(b) $m \le \frac{n^2}{4}.$

Proof.

(a) 用数学归纳法：当$n=1,2,3$时，显然有$\sum\limits_{i=1}^{n} d^2(v_i) \le mn.$

当$n\ge 4$时，假设$n-1$时结论成立，即$\sum\limits_{i=1}^{n-1} d^2(v_i) \le m(n-1).$

其中$2m = \sum\limits_{i=1}^{n-1} d(v_i)$

则考虑n的情况，假设v_n与k个点相邻，记这k个点为$v_1, v_2, \cdots v_k$，则这k个点的度在原来的基础上增加1，而$v_{k+1}, v_{k+2}, \cdots v_{n-1}$度不变。记它们原来的度为$d_1, d_2, \cdots d_{n-1}$
故要证结论成立，只需证明

$$2[d_n^2 + 2(d_1+d_2+\cdots+d_k)+k] \le nd_n + d_1+d_2+\cdots+d_{n-1}+nk$$

$$2k^2+2k+4(d_1+d_2+\cdots+d_k) \le 2nk + d_1+d_2+\cdots+d_{n-1}$$

$$4(d_1+d_2+\cdots+d_k) \le 2k(n-1-k)+d_1+d_2+\cdots+d_{n-1}$$

因为无三角形，故$v_1, v_2, \cdots v_k$两两不相邻，即它们任一点的度不大于$n-k$
故有：

$$d_1+d_2+\cdots+d_k \le k\times(n-1-k)$$

又$v_1, v_2, \cdots v_k$只与$v_{k+1}, v_{k+2}, \cdots v_{n-1}$相邻，故：

$$d_{k+1} + d_{k+2} + \cdots + d_{n-1} \geq d_1 + d_2 + \cdots + d_k$$

代入得$4(d_1 + d_2 + \cdots + d_k) \leq 2k(n-1-k) + (d_1 + d_2 + \cdots + d_{n-1})$成立。故$n$时，结论成立。

综上所述，有$\sum\limits_{i=1}^{n} d^2(v_i) \leq mn.$

(b) 不妨设G中度最大的点度为k，记此点为v_1,则v_1的邻点有k个，又不存在三角形，故这k个点两两不相连，这k个点每个点的度都不大于$n-k$,剩下的$n-k-1$个点每个点度都不大于k，故有：

$$2m = \sum_{i=1}^{n} d(v_i) \leq k + k(n-k) + (n-k-1)k = 2k(n-k) \leq 2 \times \frac{n^2}{4}$$

故可得：$m \leq \dfrac{n^2}{4}$

□

3. 证明：若连通图中的最长道路不唯一，则它们必定相交。

Proof.

反设连通图中存在不相交的两条最长道路W_1和W_2，设它们的长度为n
又因为是连通图，故两条路之间必有一条路将两路连通，记此路为W_3，长度为m，$m \geq 1$
W_1与W_3的交点将W_1 分为长度为a和$n-a$的两段，W_2与W_3 的交点将W_2分为长度为b和$n-b$的两段，不妨设$a \geq \frac{n}{2}$，$b \geq \frac{n}{2}$，则必然存在一条路长度为$a+b+m \geq n+1$，这与最长道路W_1和W_2矛盾，故假设不成立。
故若连通图中的最长道路不唯一，则它们必定相交。 □