Lab12-Euler and Hamilton Path

CS101-计算机科学导论课后作业，讲师：高晓沨，2016 秋季学期

* 可打印本页直接在页面作答/附纸装订。标注您的 姓名：蒋康安 学号：516072910045 班级：F1607204

* 电子版作业请直接上传到课程网站

1. n为何值时，无向完全图K_n是欧拉图？n为何值时，无向完全图K_n仅存在欧拉道路而不存在欧拉回路？

Solution.
若K_n是欧拉图，则K_n连通且没有奇点。
因为K_n是完全图，则K_n显然是连通的，
那么只需K_n没有奇点即可，
所以$n > 1$且n是奇数时，无向完全图K_n是欧拉图。
若无向完全图K_n仅存在欧拉道路而不存在欧拉回路，
那么K_n一定存在奇点，既然存在奇点，就要有两个奇点，
显然当且仅当$n = 2$时，无向完全图K_n仅存在欧拉道路而不存在欧拉回路。 □

2. 设G是有n个结点的简单图，其最小度$\delta(G) \geq (n+q)/2$，证明G中存在包含任意q条互不相邻边的哈密顿回路。

Solution.
对于任意给定的n,$q = 0$时显然成立，
我们假设$q = k-1$时成立($k \geq 1$)，证明$q = k$时成立即可。
根据归纳假设，当$q = k$时，$\delta(G) \geq (n+k)/2 \geq (n+k-1)/2$，
我们可以找到一条包含任意$k-1$条互不相邻边的哈密顿回路，
若选定的第k条边在此回路中，则结论显然成立，
不然的话，第k条边是我们找到的那条哈密顿回路的一根弦，设这根弦的两端点为v_1、v_2，
设与v_1相邻的两个点是v_3、v_4，与v_2相邻的两个点是v_5、v_6，
以第k条边形成的弦为分界，将该哈密顿回路形成的一个圆分成两段弧，
假设v_3、v_5在同一段圆弧上，那么v_4、v_6在另一段圆弧上，
我们将这个哈密顿回路展开，从左到右分布的点依次是$v_4 ... v_6$、v_2、v_1、$v_3 ... v_5$，
我们原先选定的k条边均分布在这条道路上，
我们假设v_4与这k条边中m条边靠右的点相邻，显然有$m \leq k$，
那么除去这些靠右的点外，v_4还至少与$(n+k)/2 - m$个点相连，设这种点叫M点，
只需存在一个与M点左相邻的点，并且这个点与v_5相邻，就可以形成一条哈密顿回路，包含我们选定的任意k条不相邻边。
下面就证明至少存在一个与M点左相邻的点，并且这个点与v_5相邻。
假设v_5与M点都不相邻，那么

$$\delta(v_5) \leq n-1-((n+k)/2-m) \leq n-1-((n+k)/2-k) \leq (n+k)/2-1 \leq (n+k)/2$$

与$\delta(G) \geq (n+k)/2$矛盾，
因此一定至少存在一个与M点左相邻的点，并且这个点与v_5相邻。
因此原命题在$q = k$时成立，
综上所述，原命题成立。 □

3. 16个扇面的编码盘有多少种刻法可以在顺时针旋转一周时组成0000到1111的16组输出？（提示，可以使用De Bruijn sequence来计算）

Solution.
根据De Bruijn sequence，假设刻法种数为m，
则$m = (k!)^{k^{(n-1)}}/k^n$，
其中k表示k个元素构成的序列，在这里$k = 2$，
n表示序列的长度为n，在这里$n = 4$，
代入数据得到$m = 16$，
所以有16种刻法。 $\square$