Lab12-Euler and Hamilton Path

CS101-计算机科学导论课后作业，讲师：高晓沨，2016 秋季学期

∗ 可打印本页直接在页面作答/附纸装订。标注您的 姓名：____________ 学号：___________ 班级：______

∗ 电子版作业请直接上传到课程网站

1. n为何值时，无向完全图K_n是欧拉图？n为何值时，无向完全图K_n仅存在欧拉道路而不存在欧拉回路？

Solution.

(a) 当n为奇数时
若无向完全图K_n是欧拉图K_n没有奇点， 又K_n是完全图，因此当且仅当n为奇数的时候，无向完全图K_n 中每个点的度均为偶数。

(b) $n = 2$时
若无向完全图K_n不存在欧拉回路，则n 必为偶数，而若$n \geq 4$,则有超过2个奇点，不存在欧拉道路，当$n = 2$时，K_n 中恰有两个奇点，故存在欧拉道路。

□

2. 设G是有n个结点的简单图，其最小度$\delta(G) \geq (n + q)/2$，证明G中存在包含任意q条互不相邻边的哈密顿回路。

Solution. 数学归纳法

对于q进行归纳。
对于$q = 0$的情况，根据Dirac定理，一定存在H回路。
假设当$q - 1$时成立，即有n个结点的简单图G最小度$\delta(G) \geq (n + q - 1)/2$，$G$中存在包含任意$q - 1$ 条互不相邻边的哈密顿回路。
那么对于q时的情况：G中的最小度$\delta(G) \geq (n+q)/2 \geq (n+q-1)/2$。所以对于$G$ 中任意q条互不相邻边，总存在一条哈密顿回路包含其中的$q - 1$条互不相邻的边。
若该回路也包含第q条边，则结论显然成立；
若不然，首先记这个哈密顿圈逆时针各个点为$v_1 \cdots v_n$(即右边的点下边较左边大)，第q 条边的左右端点分别为v_i, v_j,那么设v_{i+1}与$k, (k \leq q - 1)$ 个前面在H 回路上的$q - 1$ 条边左边的端点（简称左点）相邻，由于$d(v_{i+1}) \geq (n + q)/2$，所以$v_{i+1}$ 至少与$(n + q)/2 - k$个非左点相邻，且这$(n + q)/2 - k$ 个非左点与右边相邻点（简称右点）形成的边都不是前面取定的$q - 1$个互不相邻的边，下面证明v_{j+1}至少与一个左点相邻。
如果v_{j+1}不与任何一个右点相邻，那么

$$d(v_{j+1}) \leq n - 1 - (\frac{n+q}{2} - k) < \frac{n-q}{2} + k - 1 < \frac{n-q}{2} + k + 1 \leq \frac{n-q}{2} + q = \frac{n+q}{2}$$

这与G中的最小度$\delta(G) \geq (n + q)/2 \geq (n + q - 1)/2$矛盾，因此$v_{j+1}$至少与一个右点相邻，记这个点为$v_{m+1}$,那么，$v_{i+1}$与$v_m$相邻。
显然$(v_i, v_{i+1}), (v_j, v_{i+j}), (v_m, v_{m+1})$都不是我们之前选定的$q - 1$条边，这样我们就找到了一条回路

$$(v_{i+1}, v_m, v_{m-1}, \cdots v_{j+1}, v_{m+1}, v_{m+1}, \cdots v_i, v_j, v_{j-1}, \cdots v_{i+1})$$

这条H回路既包含已经选定的$q - 1$条互不相邻的边，也包含第q条边。
因此，G中存在包含这样q条互不相邻边的H回路。故定理成立！

□

3. 16个扇面的编码盘有多少种刻法可以在顺时针旋转一周时组成0000到1111的16组输出？（提示，可以使用De Bruijn sequence来计算）

Solution.

由De Bruijn sequence知，对于一般情况$B(k,n)$，即所有长度为n的k元素构成序列都在它的子序列（以环状形式）中，出现并且仅出现一次，且个数为

$$\frac{(k!)^{k^{n-1}}}{k^n}$$

故对于题目,取$k=2,n=4$时,刻法的个数为16。 $\square$