# Lab12-Euler and Hamilton Path

CS101-计算机科学导论课后作业，讲师：高晓沨，2016 秋季学期

$*$ 可打印本页直接在页面作答/附纸装订。标注您的 姓名：卞欣然 学号：516071910058 班级：F1607103

$*$ 电子版作业请直接上传到课程网站

1. $n$为何值时，无向完全图$K_n$是欧拉图？$n$为何值时，无向完全图$K_n$仅存在欧拉道路而不存在欧拉回路？

**Solution.** (a) 因为欧拉图必须都是偶点，我们又知道无向完全图$K_n$中每一个点的度数均为$(n-1)$。因此$(n-1)$必须是偶数，那么：$n$必须为奇数。即：$n = 2k+1, (k = 1, 2, 3, \cdots)$。

(b) 由于$K_n$仅存在欧拉道路而不存在欧拉回路，则$K_n$中有且仅有2个度为奇数的顶点，那么：$(n = 2)$。

□

2. 设$G$是有$n$个结点的简单图，其最小度$\delta(G) \geq (n+q)/2$，证明$G$中存在包含任意$q$条互不相邻边的哈密顿回路。

**Solution.** 既然是讨论互不相邻边，依定义指的是各边的端点互不重复，所以至少要对2条边以上来讨论，即$q \geq 2 (q \in N^+)$，同时节点数至少也为4，即$n \geq (2*q)$。
不失一般性，设$q = 2, 3, \cdots, m$,那么节点数可为$n = 2m \ or \ n = (2m+1)$，两者类似，现以$n = 2m$为例来解答。哈密顿回路是节点和边依次经过且不重复的回路，所以我们假定现在回路依次经过各节点和边，并回到原点，序号依次编写，即目前回路为：
$L_0 = [v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_4, v_5, e_5, v_6, e_6, v_7, e_7, v_8, e_8, \cdots,$
$v_{(2m-3)}, e_{(2m-3)}, v_{(2m-2)}, e_{(2m-2)}, v_{(2m-1)}, e_{(2m-1)}, v_{(2m)}, e_{(2m)}, v_1]$
当$q = m$时，每个节点的最小度为：$(n+q)/2 = 1.5m$，最小为3，现在假设的是每个节点只和相邻节点相连，所以每个节点至少缺1个度，所以以$q = 2$来说，我们可以构造如下回路满足题目要求：
$L_1 = [v_1, e_{1-3}, v_3, e_2, v_2, e_{2-4}, v_4, e_4, v_5, e_5, v_6, e_6, v_7, e_7, v_8, e_8, \cdots, v_{(2m)}, e_{(2m)}, v_1]$
其中$e_{1-3}$、$e_{2-4}$是2个互不相邻边；若$q = 3$，仍如上构造哈密顿回路，其中$e_{1-3}$、$e_{2-4}$和$e_5$是3个互不相邻边，依此类推：$q = m$时，可构造如下回路满足要求：
$L_2 = [v_1, e_{1-3}, v_3, e_2, v_2, e_{2-4}, v_4, e_4, v_5, e_{5-7}, v_7, e_6, v_6, e_{6-8}, v_8, e_8, \cdots,$
$v_{(2m-3)}, e_{(2m-3)-(2m-1)}, v_{(2m-1)}, e_{(2m-2)}, v_{(2m-2)}, e_{(2m-2)-2m}, v_{(2m)}, e_{(2m)}, v_1]$
因此对于$q = 2, 3, \cdots, m$，均有满足要求的哈密顿回路。 □

3. 16个扇面的编码盘有多少种刻法可以在顺时针旋转一周时组成0000到1111的16组输出？（提示，可以使用De Bruijn sequence来计算）

**Solution.** 根据De Bruijn sequence:

$$\mathrm{N} = \frac{(k!)^{k^{n-1}}}{k^n}$$

其中：$(k = 2, n = 4)$，所以有：

$$N = \frac{2^{2^{4-1}}}{2^4} = \frac{2^8}{2^4} = 2^4 = 16$$

种。 □