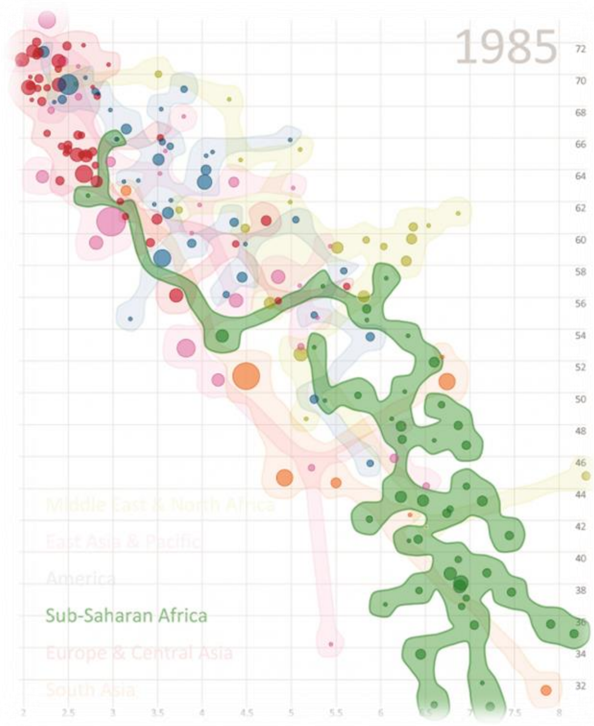


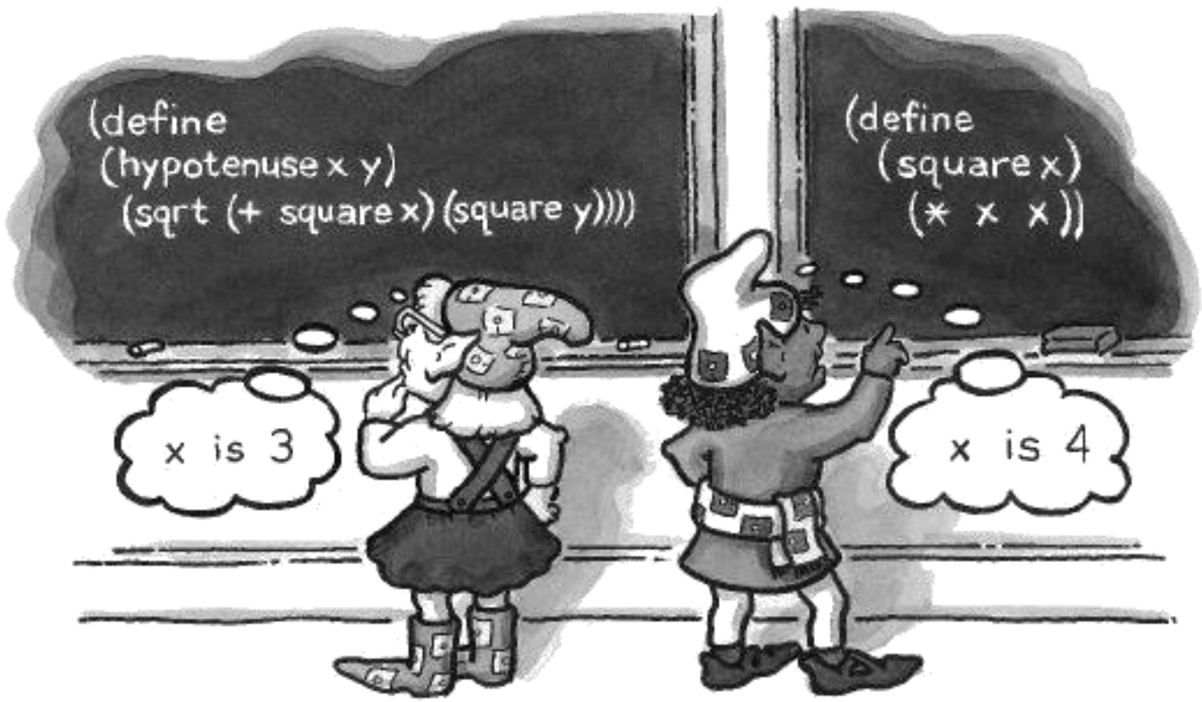
集合、关系与函数

Set, Relation, and Function

高晓沨（Xiaofeng Gao）

Department of Computer Science
Shanghai Jiao Tong Univ.

目录



变量（VARIABLE）

变量定义、变量表示

变量 (Variable)

- **变量**来源于数学，表示某种含义的一个可变值。在计算机语言中能储存计算结果或能表示值抽象概念。
- 常用命名规则
  - 常用英文单词首字母表示

    例1：图 $G=(V, E)$ → **Graph, Vertex, Edge**
    例2：函数 f → **function**
  - 在文档中常用斜体表示
  - 常用下标表示同类多个对象

    例1：集合 $V=\{v_1, v_2, v_3\}$ → 集合 V 中有3个元素

常用命名规则

- 小写字母表示“元素”或“方程”
  - *a*, *b*, *c* for elements (元素)
  - *f*, *g* for functions (函数)
  - *i*, *j*, *k* for integer indices (下标)
  - *x*, *y*, *z* for free variables (自由变量)
  - English initial for variables with meanings

- 大写字母表示“集合”
  - *A*, *B*, *S*. $A = \{a_1, a_2, a_3\}$

粗体字母 (Bold)

- 粗体小写字母表示“向量”
  - Bold small letters for vectors. $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$.
  - 向量有时也用箭头表示：

    例：$\mathbf{v} = \{v_1, \cdots, v_n\}$, $\overrightarrow{v} = \{v_1, \cdots, v_n\}$

- 粗体大写字母表示“集合的集合”
  - Bold capital letters for collections. $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$.

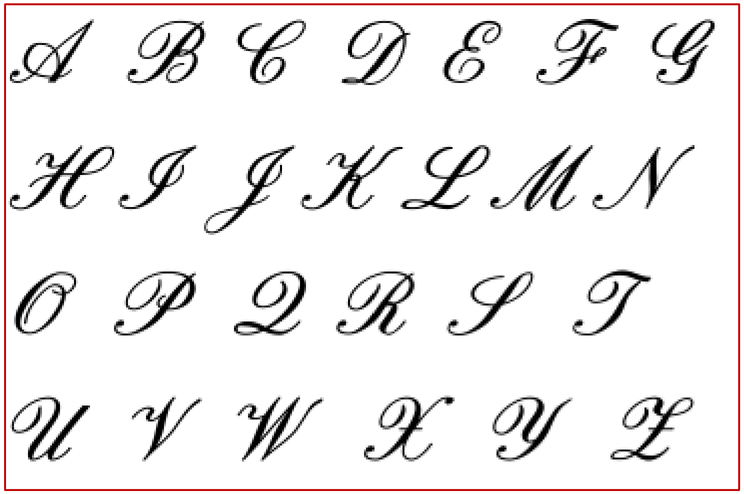
    例：$\mathbf{S} = \{S_1, \cdots, S_n\}$

黑板粗体 (Blackboard Bold)

- 黑板粗体字母表示“数域” $\mathbb{BOLD}$
  - Blackboard bold capitals for domains
- 常用数域示例
  - $\mathbb{N}$： 自然数，natural number
  - $\mathbb{Z}$： 整数， integer (Zahl, 德国女数学家)
  - $\mathbb{Q}$： 有理数，rational number (quotient)
  - $\mathbb{R}$： 实数，real number
  - https://en.wikipedia.org/wiki/Blackboard_bold

花体字 (German Script)

- 花体字表示“函数的集合”
  - German script for collection of functions.
- 示例：$\mathscr{C} = \{f_1, \cdots, f_n\}$



希腊字母 (Greek Letter)

- 希腊字母表示“参数”、“系数”
  - Greek letters for parameters or coefficients.

Α α	Β β	Γ γ	Δ δ
Ε ε	Ζ ζ	Η η	Θ θ
Ι ι	Κ κ	Λ λ	Μ μ
Ν ν	Ξ ξ	Ο ο	Π π
Ρ ρ	Σ σ ς	Τ τ	Υ υ
Φ φ	Χ χ	Ψ ψ	Ω ω

例1： $f = \alpha x + \beta y$

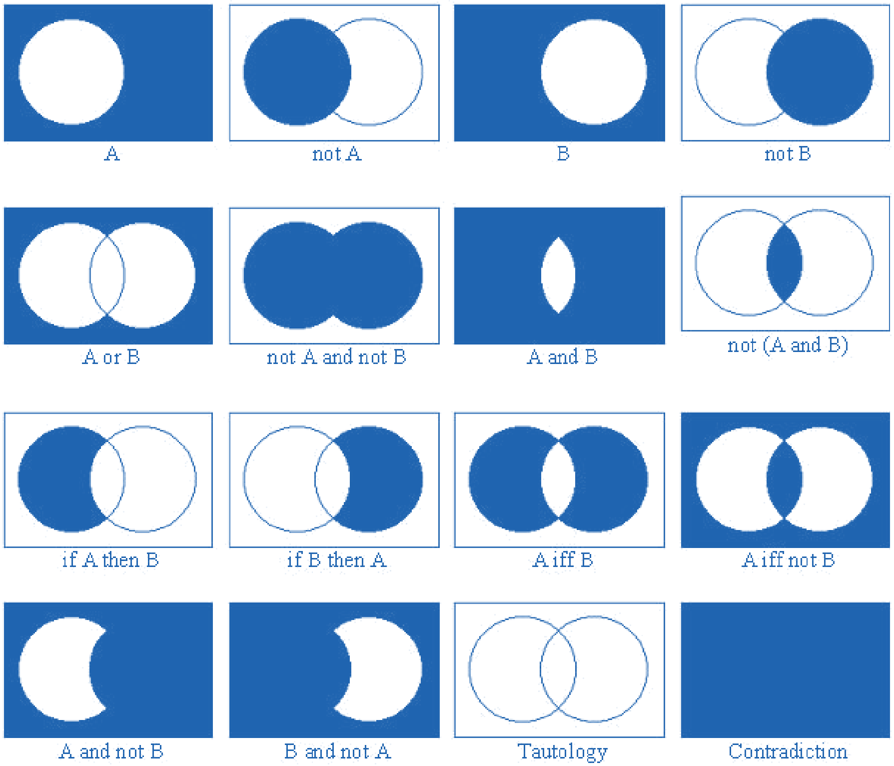
例2：椭圆的参数方程

$$x = a + r\cos\theta$$
$$y = b + r\sin\theta$$

常用变量

- *l*和*w*常表示物体的length和width
- *n*表示整数或维度（如矩阵用*m n*）
- *p*表示质数(prime)或概率(probability)
- *q*表示素数幂(prime power)或商(quotient)
- *r*表示余数(remainder)
- *x*, *y*, *z*表示笛卡尔坐标系的坐标轴或分量
- *z* 表示复数，$z=a+bi$
- ε 表示无穷小量 (arbitrarily small number)
- λ 表示特征值 (eigenvalue)
- σ 表示和，在统计中用于标准差(standard deviation)

https://en.wikipedia.org/wiki/Variable_(mathematics)

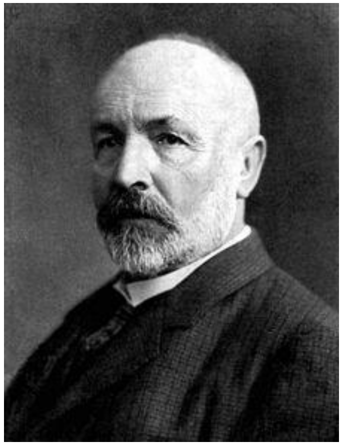


集合论（SET THEORY）

History, Definition, Operation, Theorem

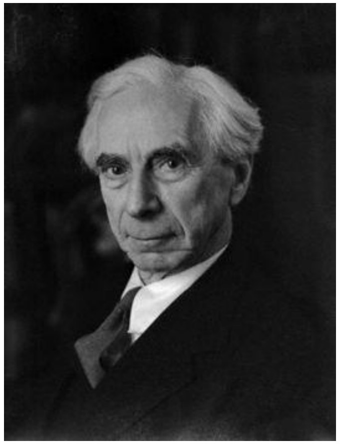
历史演进 (1)

- ❖格奥尔格·康托尔 (Georg Cantor)
  - 德国数学家，集合论创始人
  - 从三角级数的研究中产生
  - 1871年给出集合的定义，后定义了集合基本运算，无穷集合等概念。



Georg Cantor
Germany, 1845-1918

- ❖伯特兰·罗素（Bertrand Russell）
  - 英国哲学家、数理逻辑学家、历史学家
  - 《数学原理》（The Principles of Mathematics）
  - 1901年提出集合论悖论“理发师悖论”



Bertrand Russell
UK, 1872-1970

历史演进 (2)

❖ 恩斯特·策梅洛 (Ernst Zermelo)

- 德国数学家，公理集合论的主要开创者之一
- 解决了康托尔的良序问题（朴素集合论），给出了选择公理
- 1908年建立了第一个集合论公理系统。

Ernst Zermelo
Germany, 1871-1953

❖ 戴维·希尔伯特（David Hilbert）

- 德国著名数学家
- 1900.8.8，在巴黎第二届国际数学家大会上提出23个数学问题，被认为是20世纪数学的至高点
- 康托的连续统基数问题（连续统假设）
- 建议从若干形式公理出发将数学形式化为符号语言系统，建立相应的逻辑系统

David Hilbert
Germany, 1862-1943

历史演进 (3)

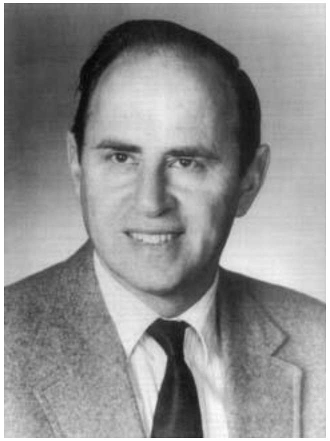
❖库尔特·哥德尔 (Kurt Gödel)

- 捷克数理逻辑学家
- 证明选择公理与连续统假设皆与ZF集合论兼容
- 哥德尔不完备定理论证了完备性与一致性的矛盾，ZFC not ⊢ ¬CH

Kurt Gödel
Czech, 1906-1978

❖保罗·柯文 (Paul Cohen)

- 美国数学家，1966获得菲尔兹奖。
- 证明连续统假设与ZF系统的独立性
- ZFC not ⊢ CH, AC



Paul Cohen
USA, 1934–2007

集合定义

- 什么是集合？（Set）

> *A **set** is an unordered collection of objects.*
>
> ——Georg Cantor, 1870

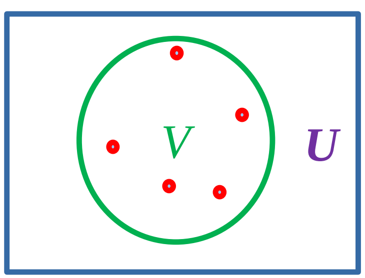
- 一些对象的全体称为一个集合
  - 集合中的对象称为**元素(element)**，不重复且无序
  - **有限集合，无限集合**
- 集合的表示方法
  - 列元素法： $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
  - 谓词表示法：$A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \land x \leq 5\}$

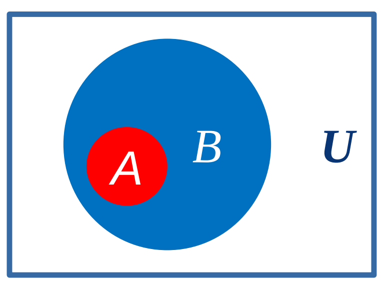
集合相关定义

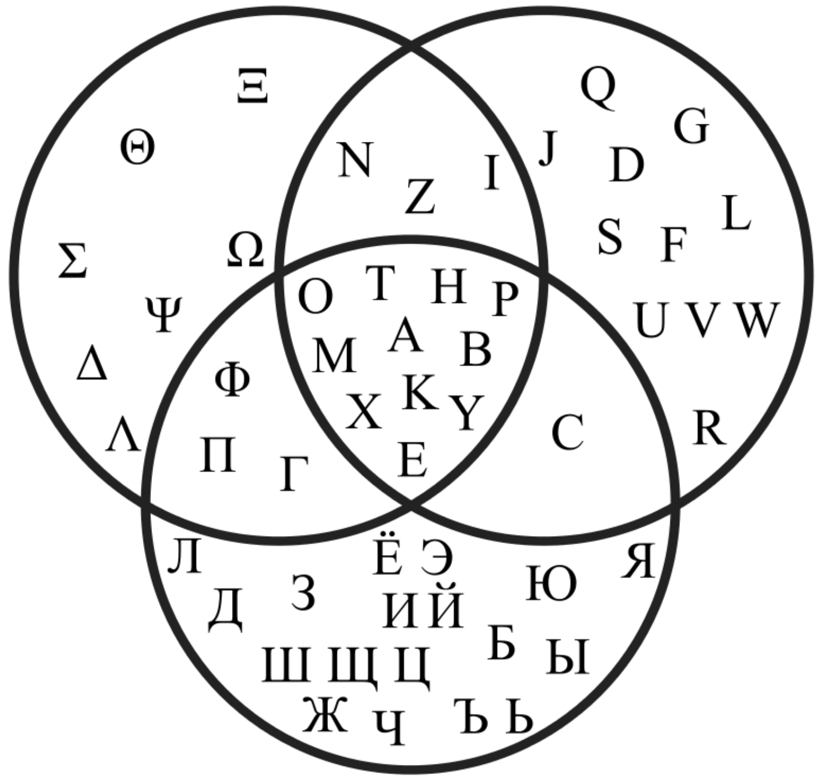
- $a \in A$: a是A中的一个元素
- $a \notin A$: a不是A中的一个元素
- $A \subseteq B$: A是B的子集(subset)；$A \subset B$: 真子集
- $A \not\subseteq B$：A不是B的子集；$A \subsetneq B$：真子集
- $A = B$: $A \subseteq B$且$B \subseteq A$；$A \neq B$: A与B不相等
- $\emptyset$: 空集(empty set)，不包含任何元素
- 集合的集合：$\mathbf{A} = \{\{2,3\},\{1,2\},3\}$

集合相关定义

- 集合的势 (Cardinality)
  - |A|: 表示A中的元素个数
- 韦恩图 (Venn Diagram)
  - 表示集合间逻辑关系
  - 1880年由John Venn提出
- 全集：Universe







Greek, Latin, Cyrillic

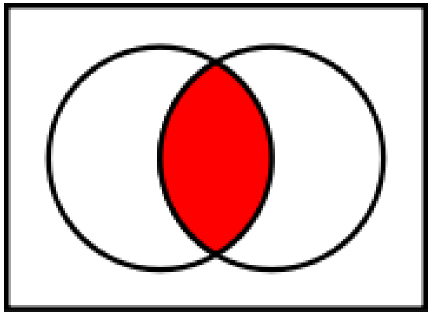
集合示例

- $a \in \{a, e, i, o, u\}$
- $a \notin \{\{a\}\}$
- $\varnothing \notin \varnothing, \varnothing \in \{\varnothing\} \in \{\{\varnothing\}\}$
- $\varnothing \subseteq S, S \subseteq S, \varnothing \subset \{\varnothing\}$
- $\{3, 4, 5\} = \{5, 4, 3, 4\}$
- $|\{3, 3, 4, \{2, 3\}, \{1, 2, \{5\}\}\}| = 4$

集合运算 (1)

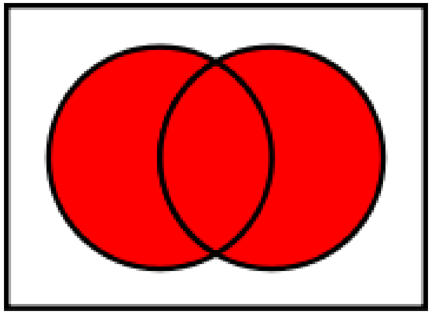
- 集合的交 (Intersection)

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$



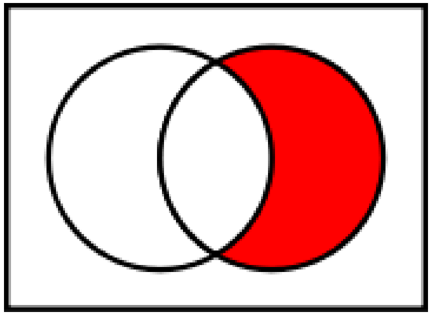
- 集合的并 (Union)

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$



- 集合的差 (Difference)

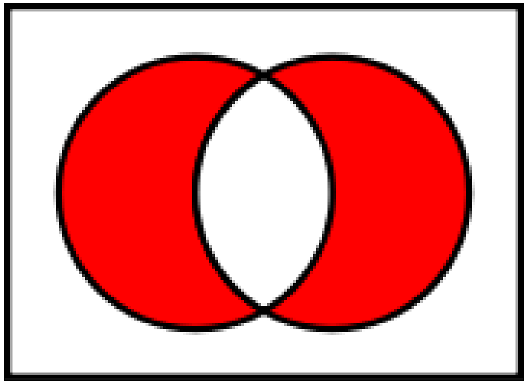
$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$



集合运算 (2)

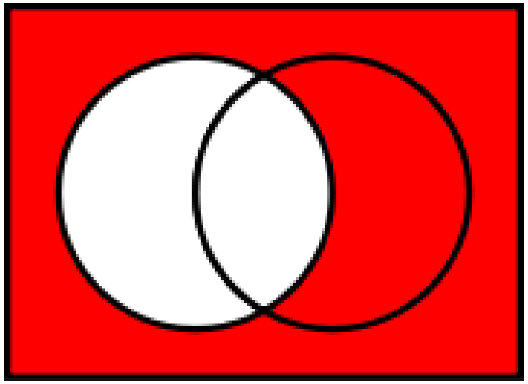
- 集合的对称差 (Symmetric Difference)

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$$



- 集合的补集 (Complement)

$$\overline{A} = U - A = \{x \mid x \notin A\}$$



幂集 (Power Set)

- 集合A的幂集：A中所有子集构成的集合，表示为2^A，或P(A)
- 幂集的势：$|2^A|=2^{|A|}$ (幂集命名由来)
- 例：$A=\{1, 2, 3\}$

  $2^A=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$
- 例：$2^\emptyset=\{\emptyset\}$

  $2^{\{\emptyset\}}=\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

集合基本运算定律 (1)

- **同一律 (Identity Laws)**

$$A \cup \varnothing = A \qquad A \cap U = A$$

- **零律 (Domination Laws)**

$$A \cup U = U \qquad A \cap \varnothing = \varnothing$$

- **幂等律 (Idempotent Laws)**

$$A \cup A = A \qquad A \cap A = A$$

- **双重否定律 (Complementation Law)**

$$\overline{(\overline{A})} = \overline{\overline{A}} = A$$

集合基本运算定律 (2)

- **交换律 (Commutative Laws)**

$$A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A$$

- **结合律 (Associative Laws)**

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

- **分配律 (Distributive Laws)**

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

集合基本运算定律 (3)

- 补余律 (Complement Laws)

$$A \cup \overline{A} = U \qquad A \cap \overline{A} = \varnothing$$

- 吸收律 (Absorption Laws)

$$A \cup (A \cap B) = A$$
$$A \cap (A \cup B) = A$$

- 德·摩根律 (De Morgan's Laws)

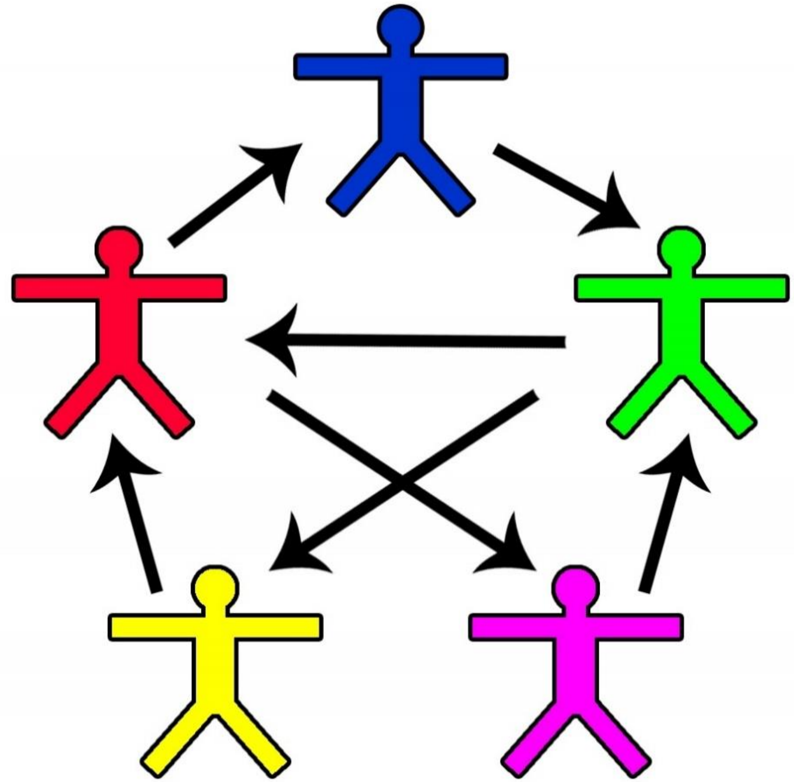
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

示例

- 例：证明德·摩根律 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- 证明：（证明集合相等）

$$
\begin{aligned}
x \in \overline{A \cup B} \quad & \Leftrightarrow \quad x \notin (A \cup B) \\
& \Leftrightarrow \quad x \notin A \wedge x \notin B \\
& \Leftrightarrow \quad x \in \overline{A} \wedge x \in \overline{B} \\
& \Leftrightarrow \quad x \in (\overline{A} \cap \overline{B})
\end{aligned}
$$

证毕。 $\blacksquare$



关系 (RELATION)

Ordered Pair, Cartesian Product, Equivalence

有序对 (Ordered Pair)

- 在集合论中，{x, y}和{y, x}代表同一集合
- 在关系中，由两个元素x和y按照一定顺序排列成的二元组称为有序对（也叫有序偶），用〈x, y〉表示。
  - x：第一元素
  - y：第二元素
- 有序对特点：
  - 当x≠y时，〈x, y〉≠〈y, x〉
  - 〈x, y〉=〈u, v〉 iff x=u且y=v

笛卡尔积 (Cartesian Product)

- 设A和B为集合，用A中的元素为第一元素，B中的元素为第二元素构成有序对。所有这样的有序对组成的集合叫做**A和B的笛卡尔积**，记作：A×B。

$$A \times B = \{\langle x, y\rangle \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

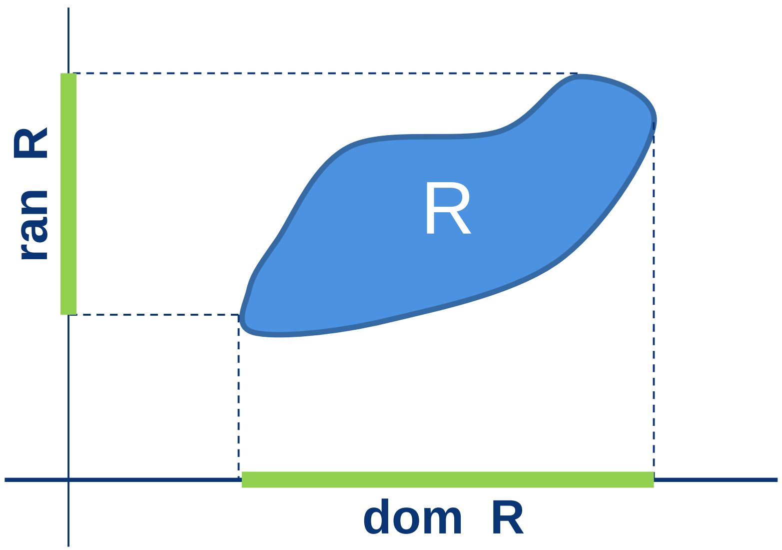
- 例：A={a, b}, B={0, 1}，则

$$A \times B = \{\langle a, 0\rangle, \langle a, 1\rangle, \langle b, 0\rangle, \langle b, 1\rangle\}$$
$$B \times A = \{\langle 0, a\rangle, \langle 0, b\rangle, \langle 1, a\rangle, \langle 1, b\rangle\}$$

关系 (Relation)

- 关系是有序对的集合，一般记作R。
- 如果〈x, y〉∈ R，则记作xRy
- 例：$\leq = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x\text{小于等于}y\}$

$$M = \{\langle x, y\rangle \in \text{People} \times \text{People} \mid x\text{与}y\text{结婚}\}$$



A relation as a subset of the plane

dom R：关系R的定义域

$$dom(R) = \{x \mid (\exists y)(\langle x, y\rangle \in R)\}$$

ran R：关系R的值域

$$ran(R) = \{y \mid (\exists x)(\langle x, y\rangle \in R)\}$$

关系的性质

设R是集合A上的关系，则R的性质主要有：

- **自反性 (reflexive)**
  - $\forall x \in A, \langle x, x\rangle \in R$
  - **反自反性 (anti-reflexive)** $\forall x \in A, \langle x, x\rangle \notin R$
- **对称性 (symmetric)**
  - $\langle x, y\rangle \in R \Rightarrow \langle y, x\rangle \in R$
  - **反对称性 (anti-symmetric)**

$$\langle x, y\rangle \in R \wedge x \neq y \Rightarrow \langle y, x\rangle \notin R$$

- **传递性 (transitive)**

$$\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in R \Rightarrow \langle x, z\rangle \in R$$

等价关系 (Equivalence Relation)

- 设R为非空集合A上的关系，如果R满足自反性、对称性和传递性，则称R为A上的**等价关系**。
- 若R是A上的等价关系，对于任意$x \in A$，令

$$[x]_R = \{y \mid y \in A \wedge \langle x, y\rangle \in R\}$$

则称$[x]_R$为x关于R的**等价类** (Equivalence Class)，简称$[x]$。

- 以R的不相交等价类为元素的集合称为A在R下的**商集**：$A/R = \{[x]_R \mid x \in A\}$

划分 (Partition)

- 设A是非空集合，如果存在一个A的子集族π (π⊆P(A))满足以下条件：
  - Ø ∉ π
  - π中任何两个元素不交
  - π中所有元素的并集等于A

  则称π为A的一个划分，π中元素为划分块。
- A上的等价关系R可产生不同等价类，商集A/R就是一个划分，称为由R诱导的划分。
- 反之，若A有一个划分，定义关系R，使得任一划分块中的x, y有xRy，则R是等价关系，称为由划分π诱导的等价关系。

例子

- 令$\omega=\{0,1,2,\ldots\}$，定义

$$m\sim n\Leftrightarrow m-n\text{ 能被6整除}$$

则~是在ω上的等价关系。商集$\omega/\sim$有六组元素：

$$[0]=\{0,6,12,\ldots\},$$

$$[1]=\{1,7,13,\ldots\},$$

……

$$[5]=\{5,11,17,\ldots\}$$

偏序关系

- 设R为非空集合A上的关系，如果R满足自反性、反对称性和传递性，则称R为A上的**偏序关系**，简称**偏序**，记为≼
- 集合A和A上的偏序关系R一起叫做**偏序集**，记作**〈≼, A〉**
- 设〈≼, A〉为偏序集，对于任意$x, y \in A$，如果$x≼y$或$y≼x$成立，则称x与y是**可比**的。如果对于任意x, y都可比，则称≼为A上的**全序关系**，且称〈≼, A〉为**全序集**。

拟序关系 (Partial Order)

- 如果R满足非自反性和传递性，则称R为A上的拟序关系(Partial Order)，记作≺。
  - 偏序关系→弱偏序关系、半序关系；
  - 拟序关系→强偏序关系
- 例：
  - <，⊂，Ancestor of为拟序关系
  - ≤，⊆，整除为偏序关系

相容关系

- 如果R满足自反性和对称性，则称R为A上的相容关系。
- 例：

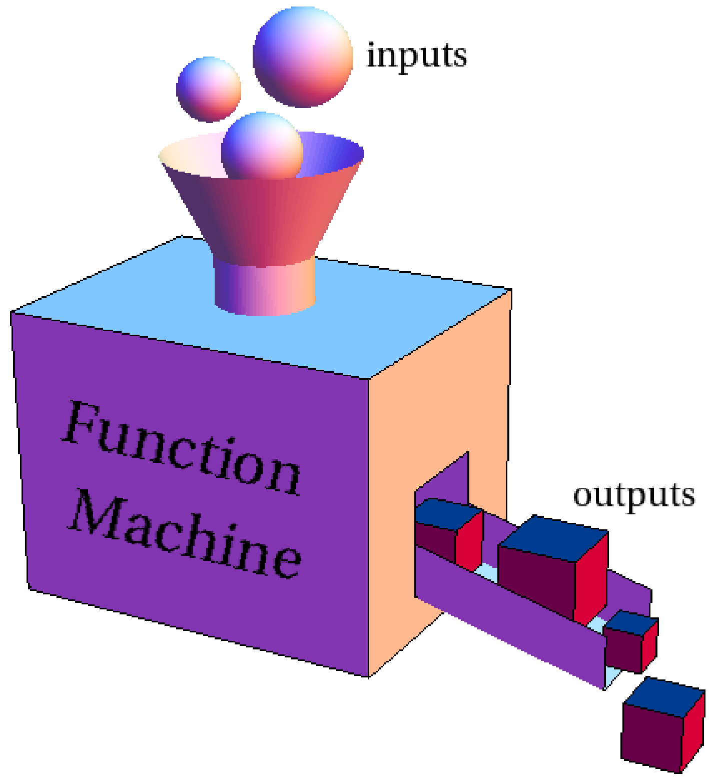
  A是英文单词的集合

  A={cat, teacher, cold, desk, knife, by}

  A上的关系R为

  R={〈x, y〉| x和y至少有一个相同字母}

  显然R是自反的、对称的，但不是传递的。



函数 (FUNCTION)

定义、性质、运算

函数 (Function)

- 对集合A到集合B的关系*f*，若满足如下条件：
  - 对任意$x \in \mathrm{dom}(f)$，存在唯一的$y \in \mathrm{ran}(f)$，使得xfy成立。
  - $\mathrm{dom}(f)=A$

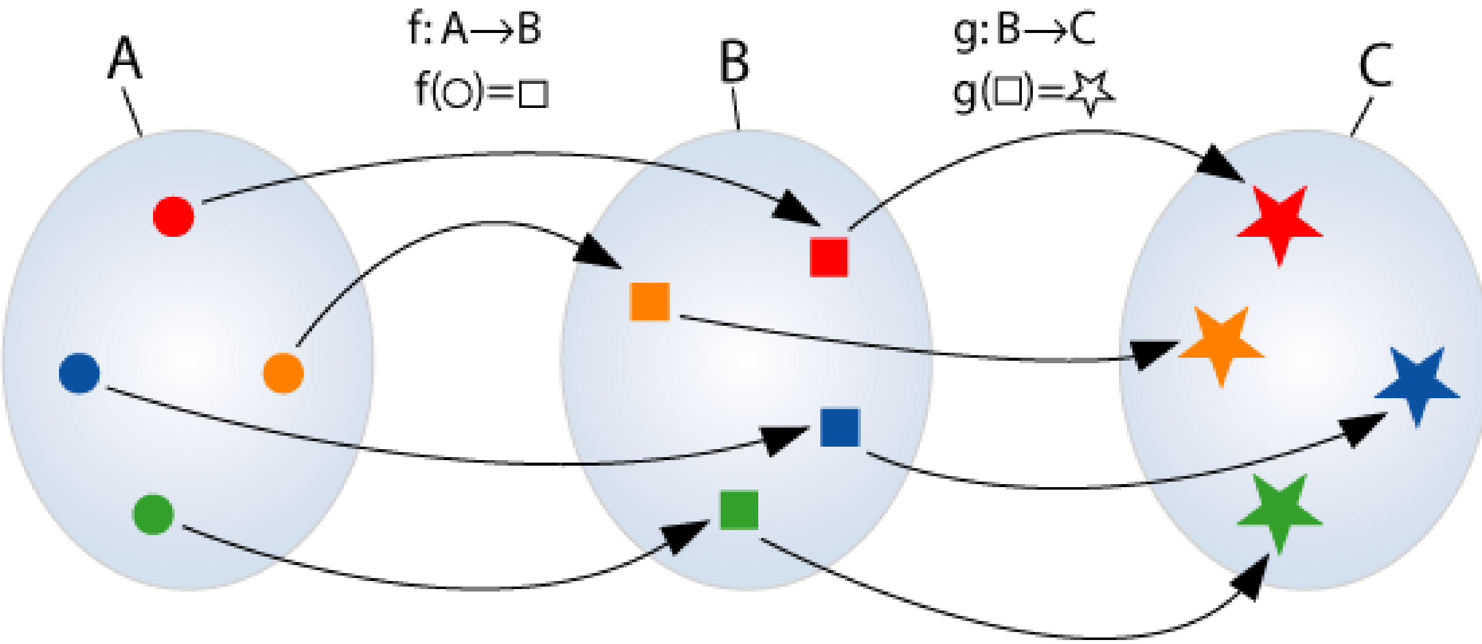
  则称*f*是从A到B的函数。
- 表示：$f: A \rightarrow B$，$f(x)=y$
- 象与原象：
  - $f[A]=\{f(x) \mid x \in A\}$称为函数的象
  - $f^{-1}[B_1]=\{x \mid f(x) \in B_1\}$称为函数的原象($B_1 \subseteq B$)

特殊函数

- 单射 (Injective, one-to-one)
  - if $x, y \in Dom(f)$, $x \neq y$, then $f(x) \neq f(y)$.
  - 例：考虑实数域，y= (3x-7) / (4x+8)为单射。
- 满射 (Surjective, onto)
  - if $Ran(f) = B$.
  - 例：考虑非负实数域，$f(x)=x^2$为满射。
- 双射 (Bijective)
  - *f*既是单射的又是满射的，称为双射
  - 例：考虑实数域，*f*(x)=x为双射。

函数的合成 (Composition)

- 设f:A→B，g:B→C，则
  - $(g \circ f)$是函数$g \circ f$:A→C
  - $(g \circ f)(x)=g(f(x))$



函数的逆 (Inverse)

- 设f:A→B是双射，则f^{-1}:B→A称为f的逆。
- $f(f^{-1}(y))=y$; $f^{-1}(f(x))=x$;
- 定义集合A上的**恒等关系**I_A:A→A，对于任意$x\in A$，有$I_A(x)=x$。
- 设f:A→B，g:B→A，如果$g\circ f=I_A$，则称g为f的**左逆**，反之如果$f\circ g=I_B$，则称g为f的**右逆**。
  - f有左逆当且仅当f为单射；
  - f有右逆当且仅当f为满射；
  - f既有左逆又有右逆当且仅当f为双射；
  - f为双射时左逆=右逆。

多项式函数 (Polynomial)

- 形如$P_n(x)= a_n x^n + a_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + a_1 x + a_0$的函数，叫做多项式函数，它是由常数与自变量$x$经过有限次乘法与加法运算得到的。
  - a_i为常数（可为负）
  - n为非负整数
- 例：
  - $4x^3 + 3x - 5$
  - $-6x^2 - \frac{9}{7}x$
  - $\frac{1}{x} + x^{\frac{3}{4}}$
  - $3x^{-2} + 5x^2$

The End !

Xiaofeng Gao