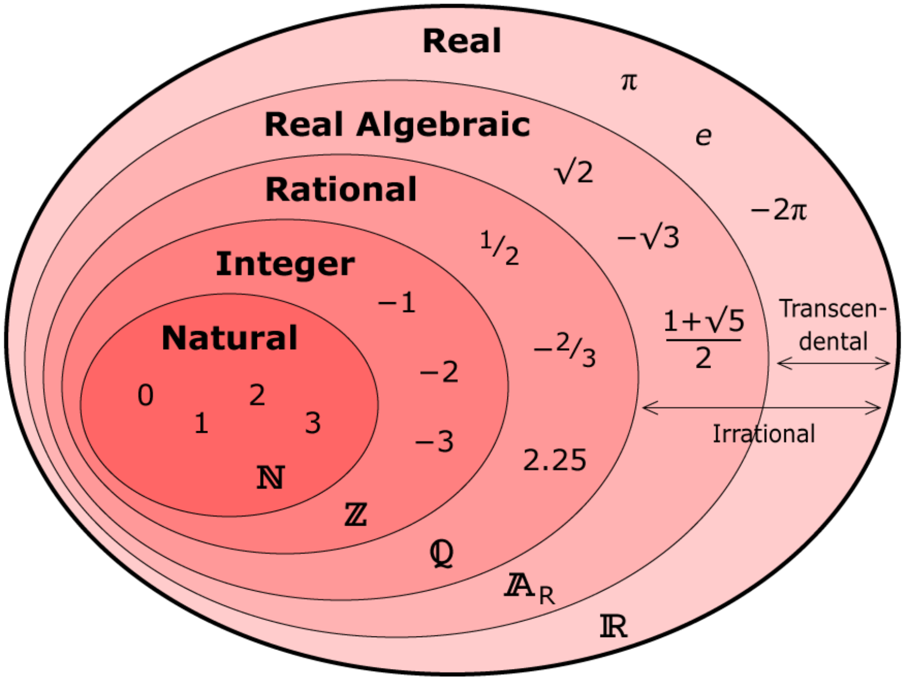
势

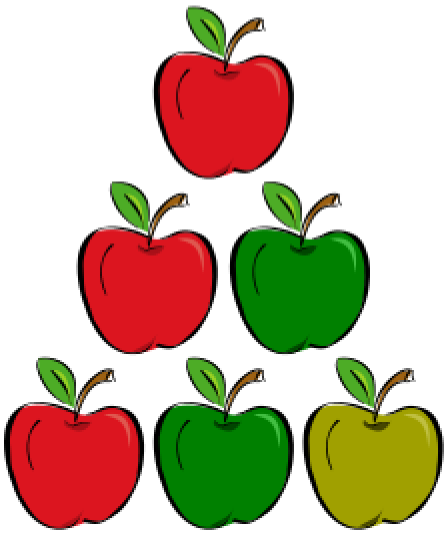
Cardinality

高晓沨（Xiaofeng Gao）

Department of Computer Science
Shanghai Jiao Tong Univ.

目录





自然数的集合论定义

历史来源、定义、意义

集合论公理体系

- 19世纪70年代，德国数学家康托尔给出了一个比较完整的集合论，对无穷集合的序数和基数进行了研究。
- 20世纪初，罗素悖论指出了康托尔集合论的矛盾。
- 为了克服悖论，人们试图把集合论公理化，用公理对集合加以限制。

自然数的集合论定义

- 自然数的集合论定义是约翰·冯·诺伊曼的序数定义：

> **Each natural number is the set of all smaller natural numbers.**
>
> ——von Neumann

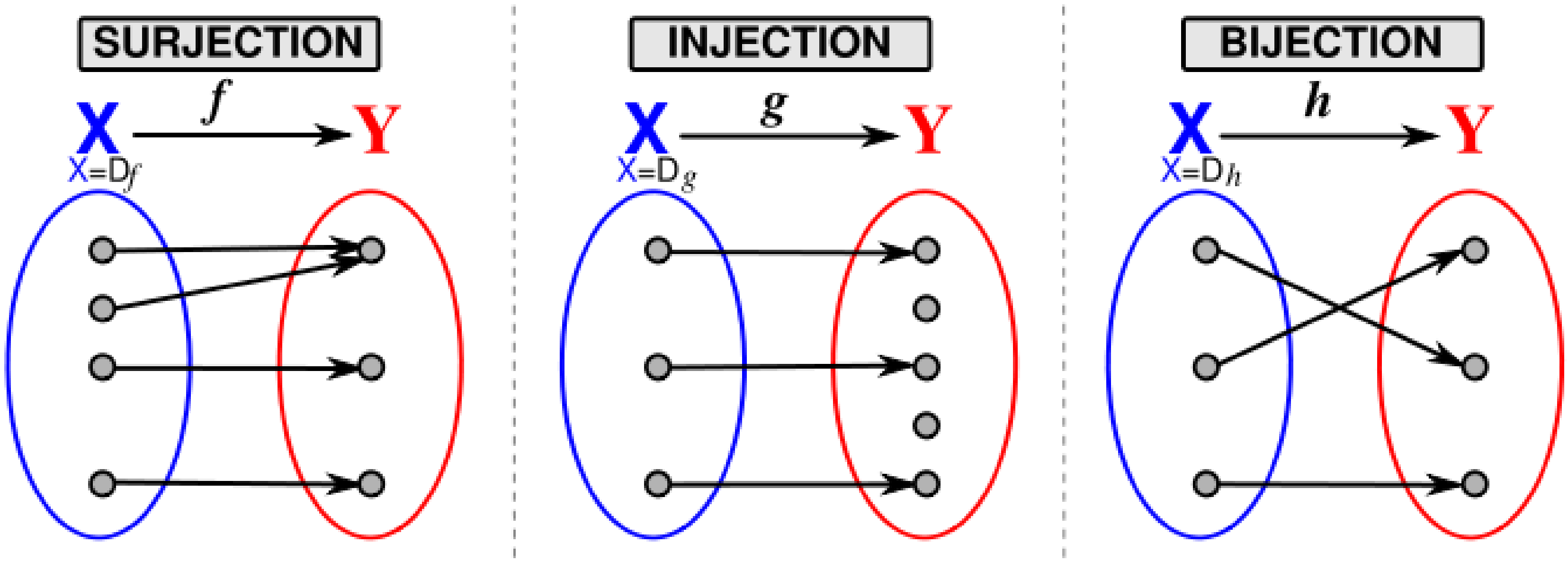
$$
\begin{aligned}
0 &= \varnothing \\
1 &= \{0\} = \{\varnothing\} \\
2 &= \{0, 1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \\
3 &= \{0, 1, 2\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}
\end{aligned}
$$

自然数的集合论定义性质

$$
\begin{aligned}
0 &= \varnothing \\
1 &= \{0\} = \{\varnothing\} \\
2 &= \{0, 1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \\
3 &= \{0, 1, 2\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}
\end{aligned}
$$

- $0 \in 1 \in 2 \in 3 \in \cdots$
- $0 \subseteq 1 \subseteq 2 \subseteq 3 \subseteq \cdots$
- n的后继为 $n \cup \{n\}$
- 令 ω 表示自然数集合 $\{0,1,2,\ldots\}$

目录



等势（EQUINUMEROSITY）

定义、描述

为什么研究“势”?

- 如何比较两个集合的大小?

$$|\{1,2,3\}| = |\{3,4,5\}|$$

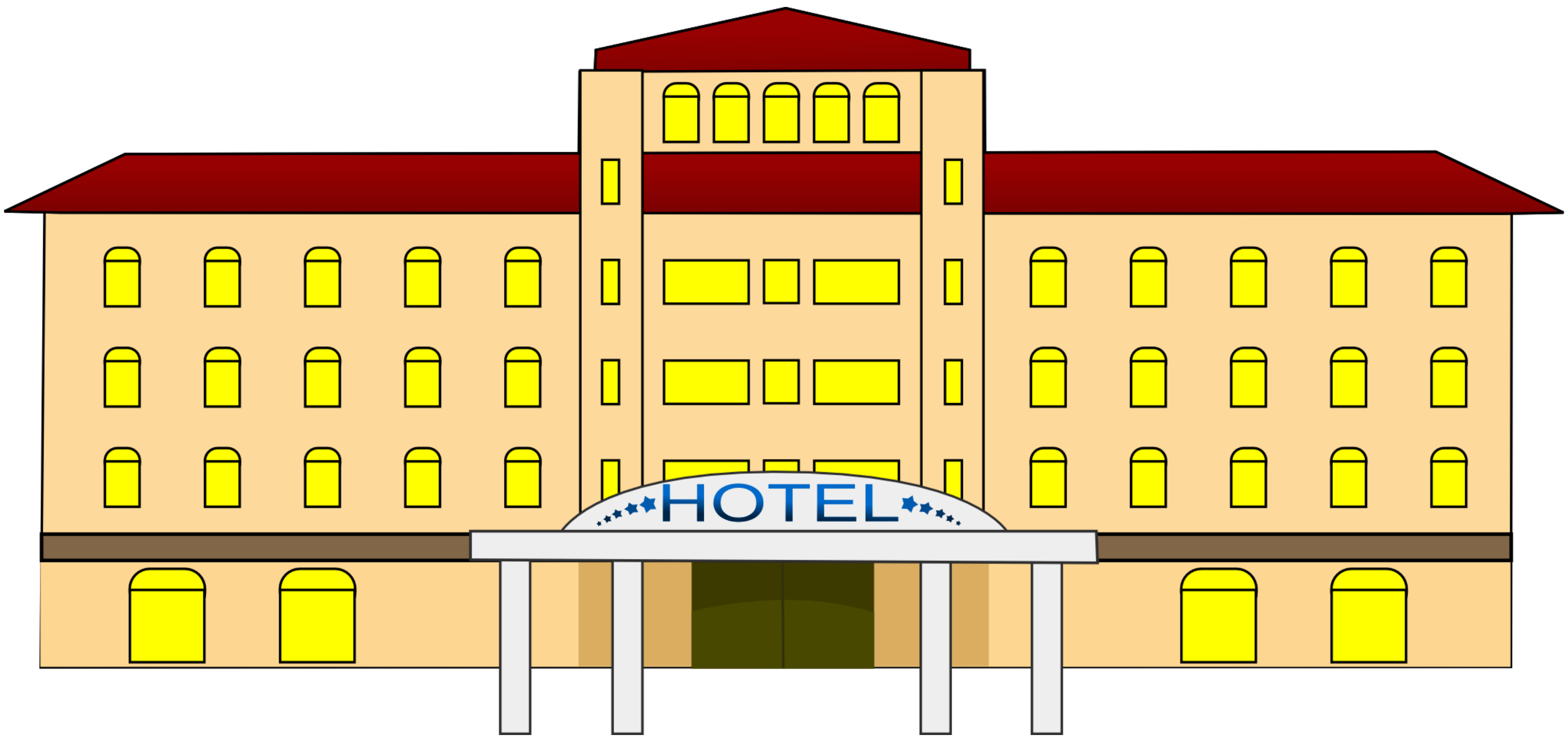
$$|\{0 \le x \le 10 \mid x \in \mathbb{N}\}| = |\{20 \le y \le 40 \mid y \in \mathbb{E}\}|$$

$$|\{x > 5 \mid x \in \mathbb{N}\}| \ ? \ |\{y \le -2 \mid y \in \mathbb{Z}\}|$$

- 集合A和集合B的大小是否一致?
- 集合A是否包含的元素比集合B多?

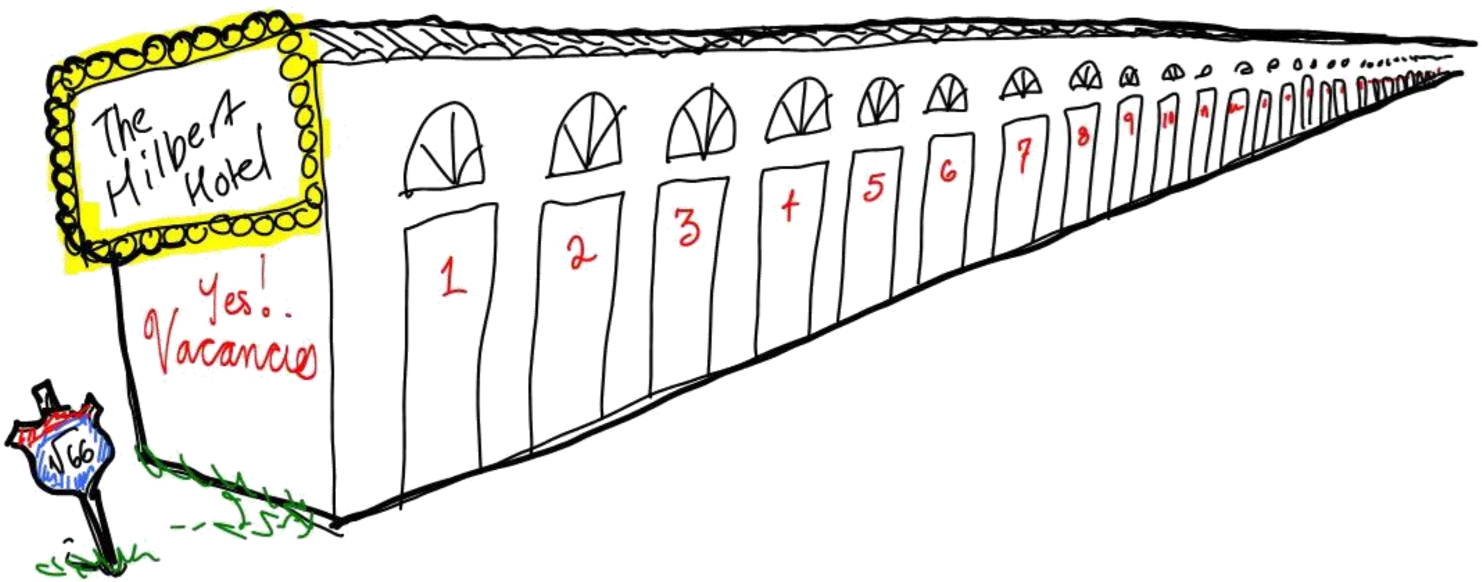
希尔伯特的旅馆 (Hilbert’s Hotel)

- 假设有一家旅馆，内设有限个房间，而所有的房间都已客满。这时来了一位新客，想订个房间：
  - “对不起”，旅馆主人说，“所有的房间都住满了。”



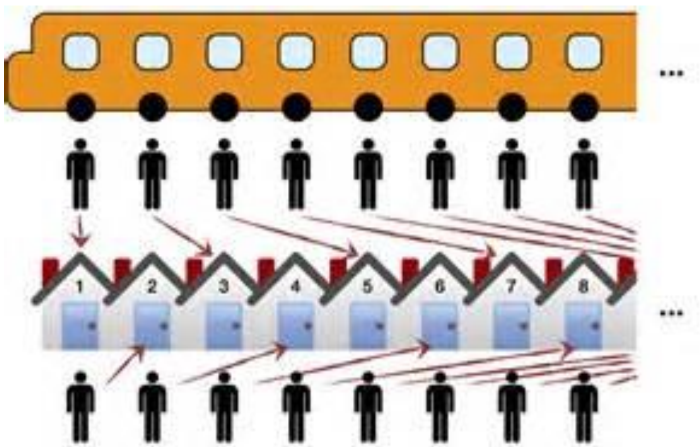
希尔伯特的旅馆 (Hilbert’s Hotel)

- 再假设另一家旅馆，内设无限个房间，所有的房间也都客满了。这时来了一位新客，想订个房间：
  - “不成问题！”旅馆主人说。接着他就把1号房间的旅客移到2号房间，2号房间的旅客移到3号房间，3号房间的旅客移到4号房间等等，这样继续移下去。这样一来，新客就被安排住进了已被腾空的1号房间。



希尔伯特的旅馆 (Hilbert's Hotel)

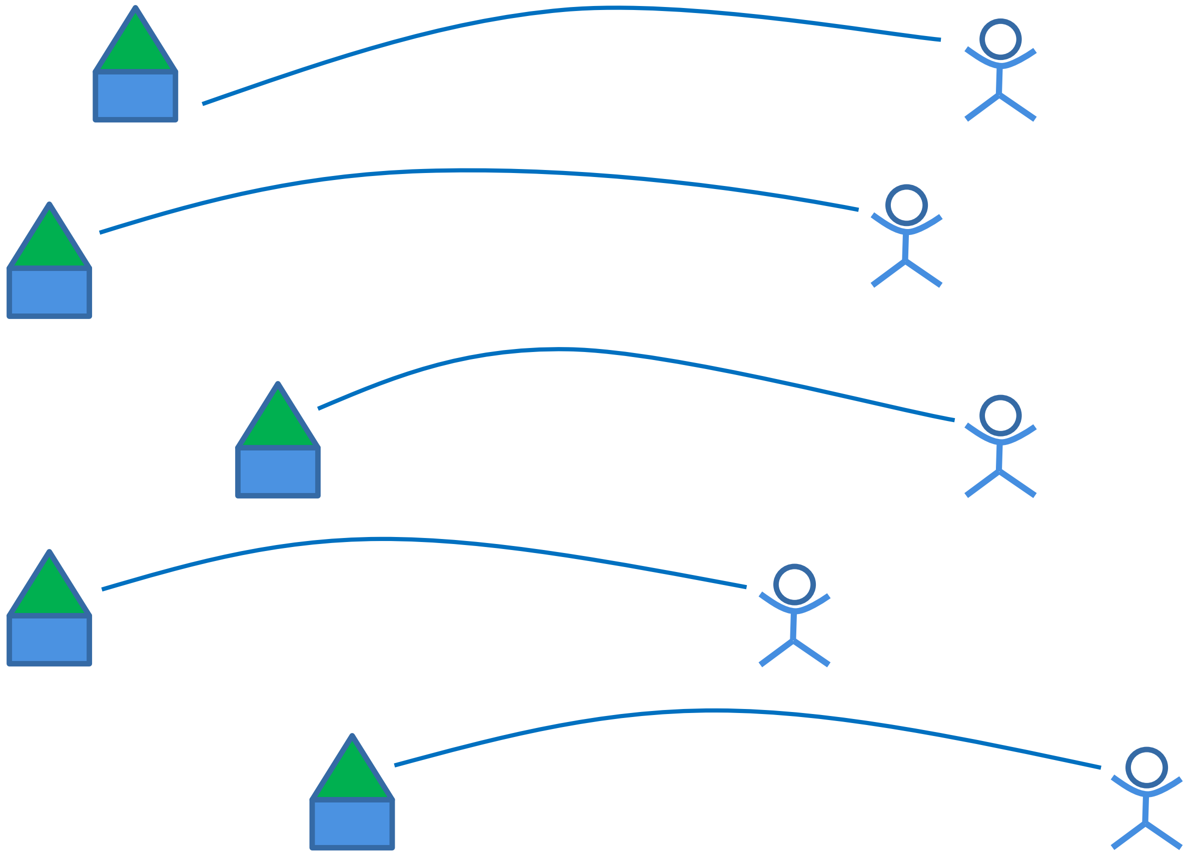
- 再假设一个有无限个房间的旅馆，各个房间也都住满了客人。这时又来了无穷多位要求订房间的客人。
  - “好的，先生们，请等一会儿。”旅馆主人说。于是他把1号房间的旅客移到2号房间，2号房间的旅客移到4号房间，3号房间的旅客移到6号房间，如此等等，这样继续下去。这样所有的单号房间都腾出来了，新来的无穷多位客人可以住进去，问题解决了！



希尔伯特的旅馆 (Hilbert’s Hotel)

- 此时，又来了无穷多个旅行团，每个旅行团有无穷多个旅客：
  - 原来的旅客1号房间客人搬到2号，2号房间客人搬到4号……，空出所有单数房。
  - 让1号旅行团到3号，3^2号，3^3号，3^4号，…，3^k号，…
  - 让2号旅行团到5号，5^2号，5^3号，5^4号，…，5^k号，…
  - 这样不仅安排下了所有旅客，而且空出了1，15，21，33，35……这些不能表示为奇素数的k次幂的房间。

房间 VS 客人



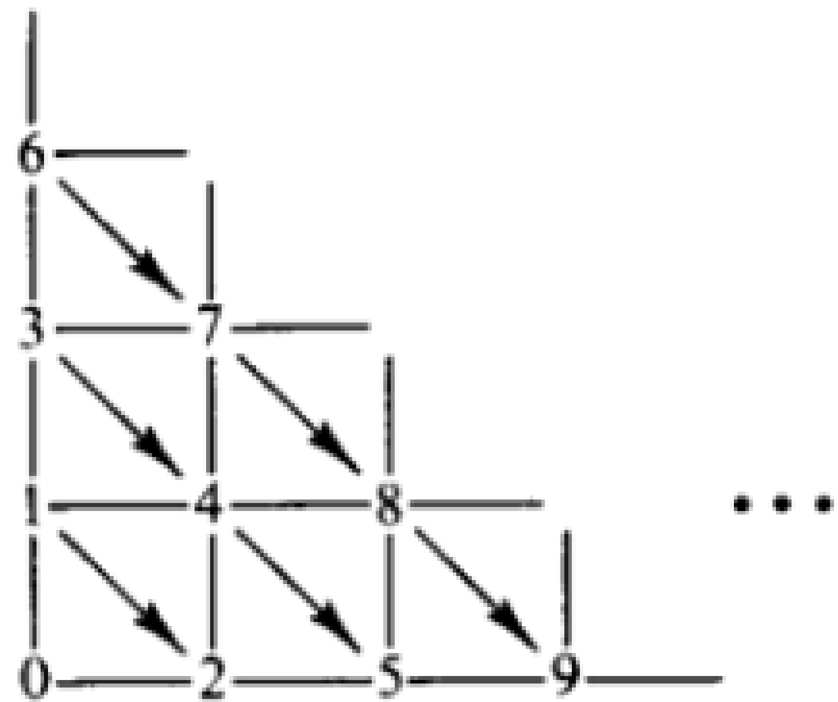
等势 (Equinumerosity)

- 集合A与集合B等势 (写作A≈B)，当且仅当存在一个A到B的双射函数*f*。
- 函数*f*也称为集合A和集合B的一一对应（one-to-one correspondence）。
- 称为等势、均势或等多 (equipotence, equipollence, equinumerosity)。
- 有限集合 vs 无限集合

一维自然数空间 vs 二维自然数空间

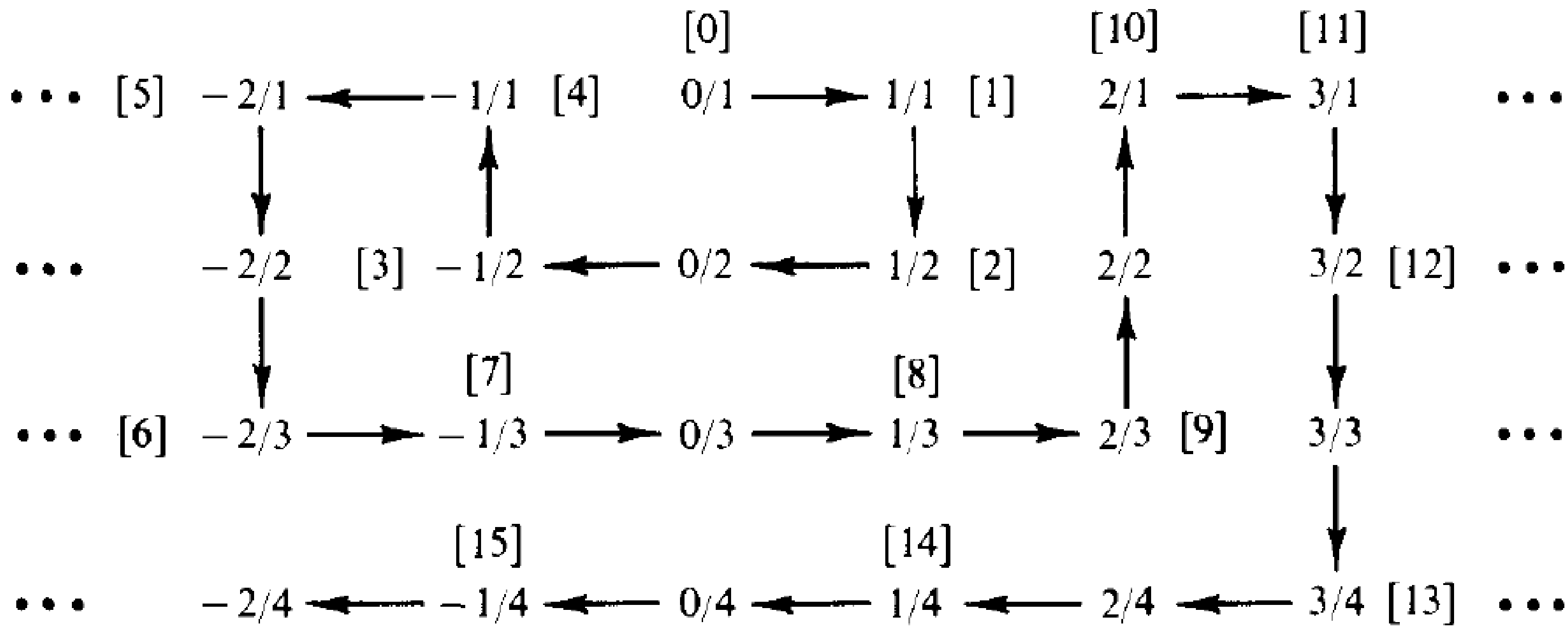
- 例：令ω表示自然数集合{0, 1, 2, …}，判断ω×ω和ω的大小。
- ω×ω≈ω，存在函数J将两者一一对应。

J(m,n)=
$((m+n)^2+3m+n)/2$



自然数 vs 有理数

❖ 例：判断自然数集合与有理数集合的大小。



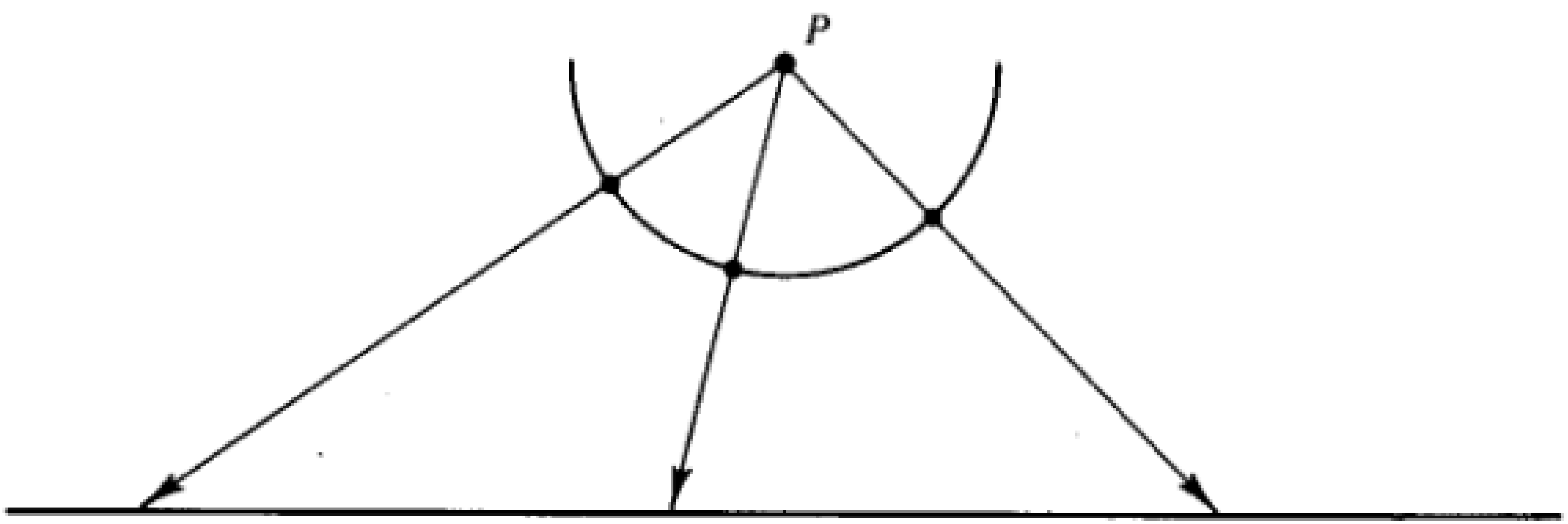
$$\omega \approx \mathbb{Q}$$

(0,1)区间 vs 实数

- 例：判断(0, 1)区间内的实数个数与实数集的大小。

$$(0,1) = \{0 < x < 1 \mid x \in \mathbb{R}\} \approx \mathbb{R}$$

$$f(x) = \tan(\pi(2x-1)/2)$$



等势范例

- 例：证明$(0,1) \approx (n,m)$
  - 证明：$f(x) = (n\text{-}m)x+m$

- 例：证明$(0,1) \approx \{x \mid x \in \mathbb{R} \land x>0\} =(0,+\infty)$
  - 证明：$f(x)=1/x - 1$

- 例：$[0,1] \approx [0,1)$
  - 证明：$f(x)=x, \quad$ if $0 \leq x<1 \land x \neq 1/(2^n), n \in \omega$
    $f(x)=1/(2^{n+1})$ if $x=1/(2^n), \quad n \in \omega$

等势范例 (2)

- 例：证明$[0,1)\approx(0,1)$
  - 证明：$f(x)=x \quad \text{if } 0<x<1 \wedge x\neq 1/(2^n),\ n\in\omega$
    $f(0)=1/2 \quad x=0$
    $f(x)=1/(2^{n+1}) \quad \text{if } x=1/(2^n),\ n\in\omega$

- 例：证明$[0,1]\approx(0,1)$

等势范例 (3)

- 给定集合A，B，定义函数集合^{A}B：

$$^{A}B = \{f \mid f \text{ is a function from } A \text{ to } B\}$$

则有 $P(A) \approx {}^{A}2$

- 证明：定义一个从P(A)到$^{A}2$的满射H，对A的任意子集B，H(B)是B的特征函数，

$$f_B(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \in B; \\ 0, & \text{if } x \in A - B. \end{cases}$$

则H是双射。

等势关系定理

- 定理：对于任意集合A，B和C，关系“≈”具有如下性质：
  - A ≈ A
  - 如果 A ≈ B，那么 B ≈ A
  - 如果 A ≈ B 且 B ≈ C，那么 A ≈ C
- 证明：由等势函数合成可得。

康托尔定理 (Cantor 1873)

- **定理1：自然数集合ω与实数集合ℝ不等势。**
- **证明：(对角线原理) 对任何函数 f: ω→ ℝ，总存在一个实数z不属于ran(f)。**

$$f(0) = 32.4345\ldots,$$

$$f(1) = -43.334\ldots,$$

$$f(2) = 0.12418\ldots,$$

- **z: 整数部分为0，如果f(n)的第(n+1)位小数部分不是7，则z的该位设为7，否则设为6。**

则z是不属于ran(f)的实数。

康托尔定理 (Cantor 1873)

- **定理2：没有集合与自己的幂集等势。**
- **证明：令g:A→P(A)，我们将构建一个A的子集B，使得B不在ran(g)中。令**

$$B = \{x \in A \mid x \notin g(x)\}$$

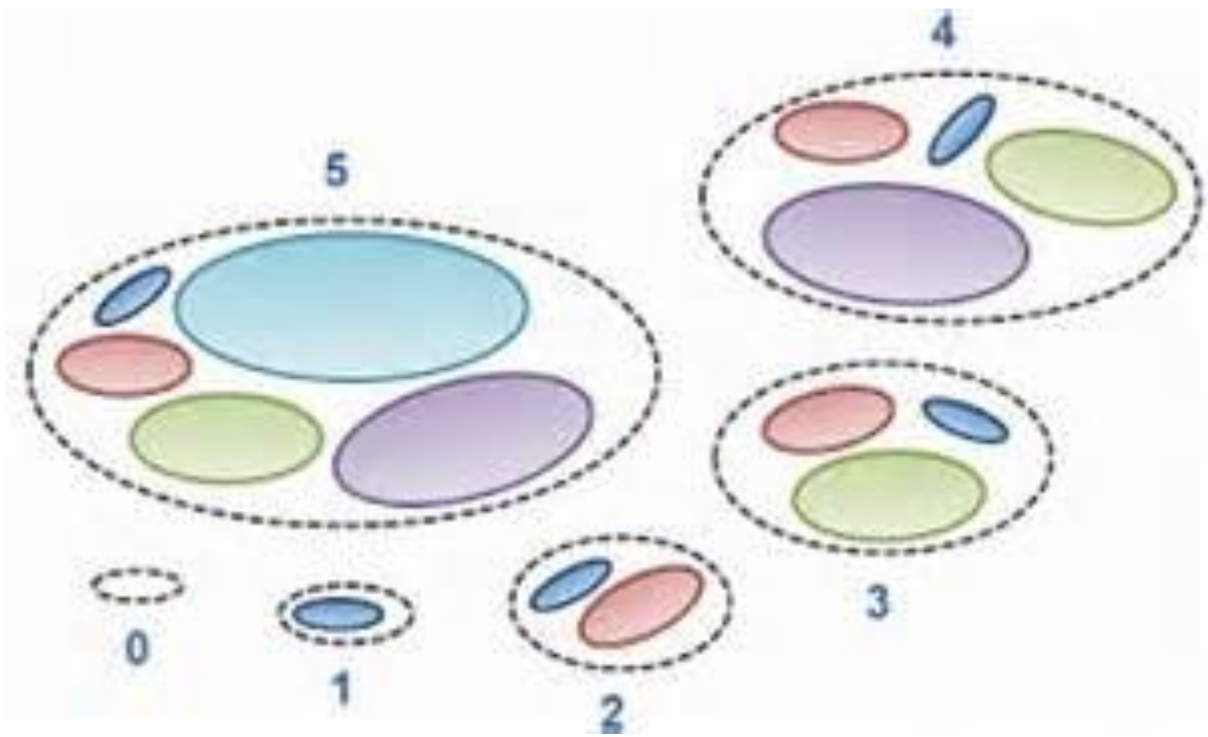
则有B⊆A，但是对于任意*x*∈A，

$$x \in B \Leftrightarrow x \notin g(x)$$

因此B≠g(*x*).

有限集合 (Finite Sets)

- 定义：一个集合是有限的当且仅当它与某个自然数等势，否则它是无限的。
- （每个自然数由更小的自然数集合组成）



鸽巢原理 (Pigeonhole Principle)

- 没有自然数与自己的真子集等势。

证明：（数学归纳法）

令f为从n到n的单射，需证ran(f)是集合n

定义集合T:

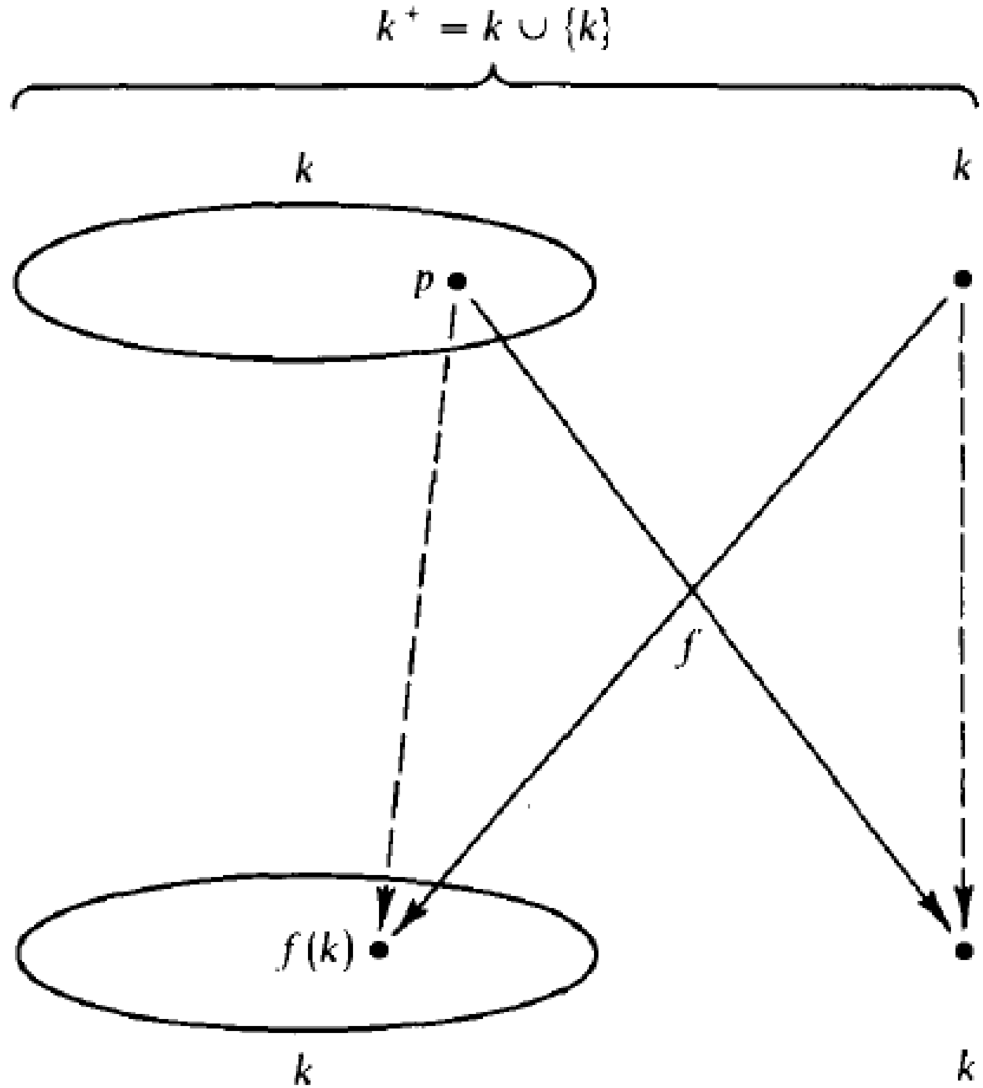
$$T = \{n \in \omega \mid \text{ any one-to-one function from } n \text{ into } n \text{ has range } n\}$$

鸽巢原理

- $0 \in T$
- 假设$k \in T$
- 证明$k^{+} \in T$

  分两种情况：

  - $\mathrm{ran}(f|_k) = k$
  - $f'(p)=f(k)$
    $f'(k)=f(p)=k$
    $f'(x)=f(x)$



鸽巢原理的其他表述

- 鸽巢原理：将n个物体放入m个鸽巢中(n>m)，则必有至少一个鸽巢含有多于一个物体。
- Dirichlet's box principle
- Dirichlet's drawer principle
- 狄利克雷（1805～1859）
  - 德国数学家
  - 解析数论的奠基者，现代函数概念的定义者

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet

推论

❖ 推论：没有有限集合与自己的真子集等势。

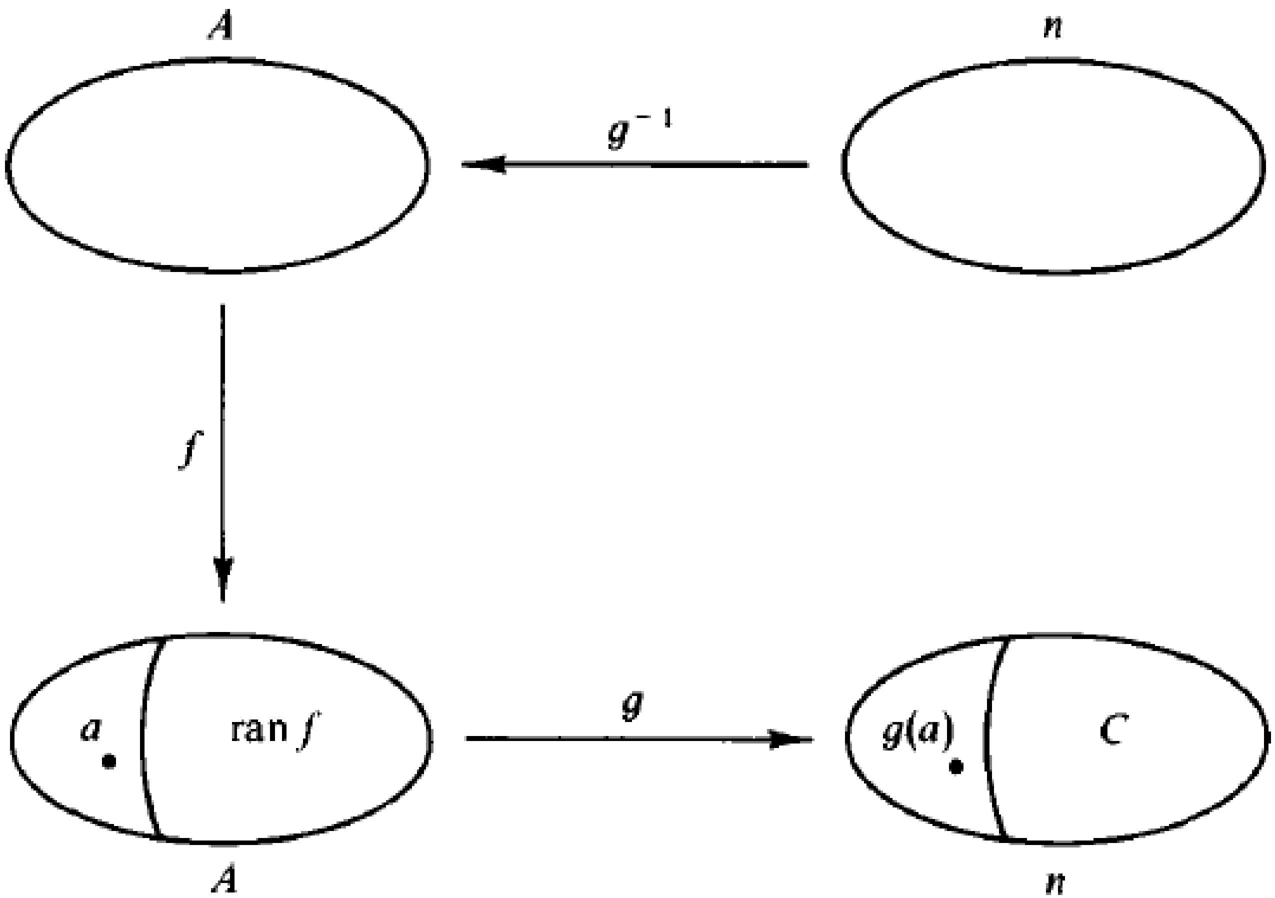


Fig. 36. What f does to A, $g \circ f \circ g^{-1}$ does to n.

其他结论

- 推论：任何一个与自己真子集等势的集合是无限的。
- 推论：集合ω是无限的。
- 推论：任何一个有限集合都与唯一一个自然数等势。
  - 证明：假设 A≈m 且 A≈n
    根据“≈”的性质，m≈n
    根据三分论，必有m=n, m⊂n或n⊂m之一成立
    根据之前推论，显然后两者均不成立。
    所以**m=n**。

目录

基数 (CARDINAL NUMBER)

定义、性质、排列

基数 (Cardinal Number)

- 对于任意一个有限集合A，唯一存在的等势自然数n∈ω使得A≈n称为A的基数(Cardinal Number)，记作**Card A**。
- 例：
  - {a,b,c,d}≈4，如果a,b,c,d是独立元素。
  - 对任何有限集合A，有A≈Card A
  - 对任何有限集合A，B，有

    Card A = Card B iff A≈B.
- 对无限集合如何计数？

无限集合的基数

- 基本思路：**Card A=Card B iff A≈B**
- 定义：Card $\omega = \aleph_0$ (aleph-zero)
  - $\aleph$：第一个希伯来字母，
  - $\aleph_0$：最少的超穷基数

$\aleph_0$

- 实数集：Card $\mathbb{R} = \aleph_1$
  - 又用C表示，称为“连续统”
- $\aleph_0$、$\aleph_1$、$\aleph_2$ ……

阿列夫族

$\aleph_0$	下列每一集合中的元素数目—— {1，2，3，4，5，6，7，8，9，10，11…} {…，－4，－3，－2，－1，0，1，2，3，4，…} {有理数}
$\aleph_1$	下列每一集合中的元素数目——— {线上的点} {球内的点} {立方体内的点}
$\aleph_2$	下列每一集合中的元素数目—— {所有曲线}
$\aleph_3$ $\vdots$ $\aleph_n$	下列每一集合中的元素数目—— ？的集合

引理

- 如果C是自然数n的一个真子集，则存在m<n，使得 $C \approx m$。

证明：（数学归纳法）

$$T = \{n \in \omega \mid \text{ any proper subset of } n \text{ is equinumerous to a member of } n\}$$

- $0 \in T$（没有真子集，必然满足T的约束）
- 假设 $k \in T$，证明 $k^+ \in T$
  - 考虑 k^+ 的真子集C（$C \neq k^+$）

证明

- 情况1：$C=k=\{0,1,\ldots,k-1\}$，则$C\approx k\in k^+$
- 情况2：C是k的一个真子集。则由于$k\in T$，存在某个$m\in k\in T$，使得 $C\approx m$。
- 情况3：如果$k\in C$，即$C=\{\ldots, \ldots, k\}$
  则$C=(C\cap k)\cup\{k\}=\{\ldots, \ldots, k\}\cap\{0,1,\ldots,k-1\}\cup\{k\}$
  则$C\cap k$是k的真子集 ($C\neq k^+$)。因为$k\in T$，存在$m\in k$满足$C\cap k\approx m$。令f是$C\cap k$与m的一一对应函数，则$f\cup\langle k,m\rangle$是C与m^+的一一对应。由于$m\in k$，$m^+\in k^+$，所以

$$C\approx m^+\in k^+，所以k^+\in T。$$

推论

- 任何有限集合的子集也是有限的。

证明：考虑$A \subseteq B$，并令f是B与某个自然数n的一一对应函数。

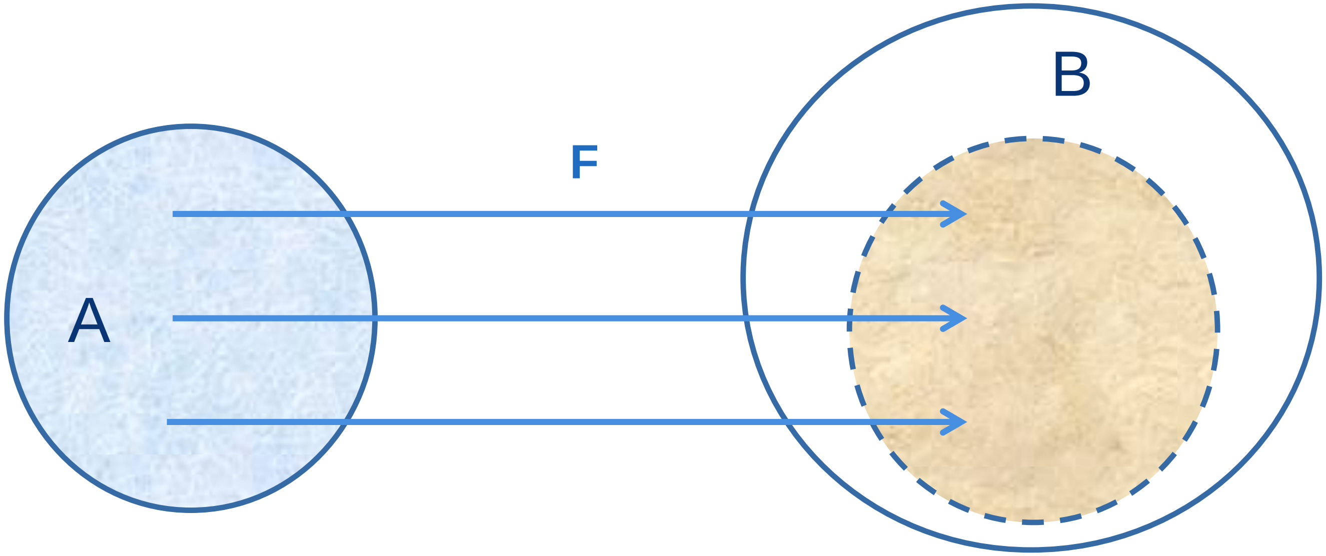
则$A \approx f[A] \subseteq n$

则$f[A] \approx m$ for some $m \in n$

所以 $A \approx m \in n \in \omega$.

集合支配

- 集合A被集合B支配（dominate），记作**A≼B**，如果存在一个从A到B的单射。
  - 任何集合都支配其自身
  - 如果A⊆B，则A被B支配
  - A≼B 当且仅当A与B的子集等势。



基数比较

- Card A $\leq$ Card B iff A≼B
- 令κ和λ为任意基数，定义

$$\kappa < \lambda \text{ iff } \kappa \leq \lambda \text{ and } \kappa \neq \lambda$$

- 例：Card K < Card L iff K≼L 且 K≉L
  - 如果 A⊆B，则 Card A $\leq$ Card B
  - 如果 $\kappa \leq \lambda$, 则存在集合 K⊆L 满足 Card K= κ 和 Card L= λ.
  - 对于任意基数 κ，有 $0 \leq \kappa$
  - 对于任意有限基数 n, 有 $n < \aleph_0$.

基数性质

对于任意基数κ, λ, 和 μ， 有:

- $\kappa \le \kappa$
- $\kappa \le \lambda \le \mu \Rightarrow \kappa \le \mu$
- $\kappa \le \lambda$ and $\lambda \le \kappa \Rightarrow \kappa = \lambda$
- Either $\kappa \le \lambda$ or $\lambda \le \kappa$

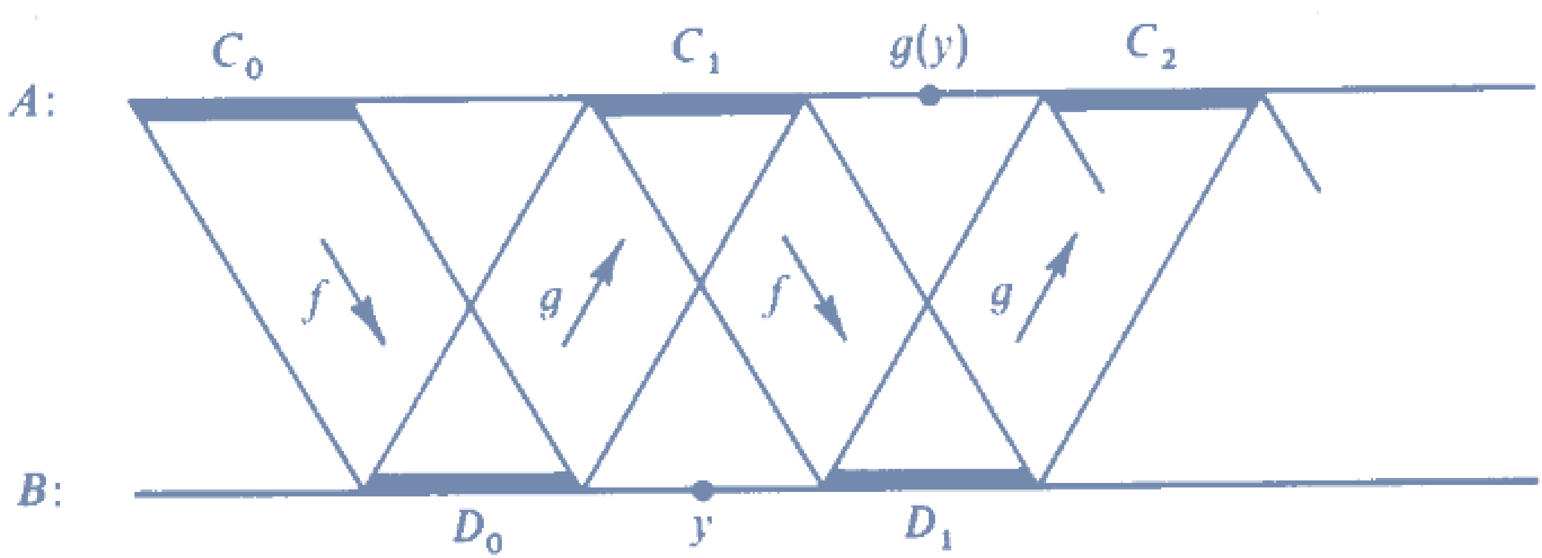
Schröder-Bernstein Theorem

Using Axiom of Choice

Schröder-Bernstein Theorem

又称康托尔-施罗德-伯恩斯坦定理（CSB定理）

- 如果**A≼B** 且 **B≼A**, 则 **A≈B**
- 对于基数**κ** 和 **λ**, 如果 **κ ≤ λ** 且 **λ ≤ κ**, 则 **κ = λ**.
- （镜像法证明）



CSB定理应用

- 如果A⊆B⊆C且A≈C，则三个集合等势。
- 实数集合ℝ与[0,1]闭区间等势。
- $\kappa \leq \lambda < \mu \Rightarrow \kappa < \mu$
- $\kappa < \lambda \leq \mu \Rightarrow \kappa < \mu$
- $\mathbb{R} \approx {}^{\omega}2$，则$\mathbb{R} \approx P(\omega)$
  - $\mathbb{R} = 2^{\aleph_0}$
  - $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$有基数 $2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 + \aleph_0} = 2^{\aleph_0}$，即平面与直线等势。

选择公理 (Axiom of Choice)

- **公理1**：对任意关系R，存在方程 $F \subseteq R$ with $dom\ F = dom\ R$.
- **公理2**：对非空集合的笛卡尔积非空。
- **公理3**：基数可比性：对于任意集合 C 和 D，$C \preccurlyeq D$ 或 $D \preccurlyeq C$总有其一会成立。
- **公理4**：(Zorn’s lemma) 令A为一个集簇，使得任意子集簇 $B \subseteq$ A , 总有 $\cup B \in$ A成立。则A包含一个最大独立元素M (a “maximal” element)， 使得M不是A中任何一个集合的子集。
- …

可数集 (Countable Set)

- 集合A是可数的(countable)当且仅当$A \preccurlyeq \omega$，i.e. iff Card A $\le \aleph_0$。
- 集合A可数表示该集合可用自然数计数。
- 等价定义：集合A可数当且仅当A是有限集或A的基数为$\aleph_0$
- 例：
  - ω，$\mathbb{Z}$，$\mathbb{Q}$可数
  - A，B为可数集，则$C \subseteq A$，$A \cup B$，$A \times B$均可数
  - 对任意无限集合，P(A)不可数。
- 定理：可数集合的可数并集仍可数。

连续统假设 (Continuum Hypothesis)

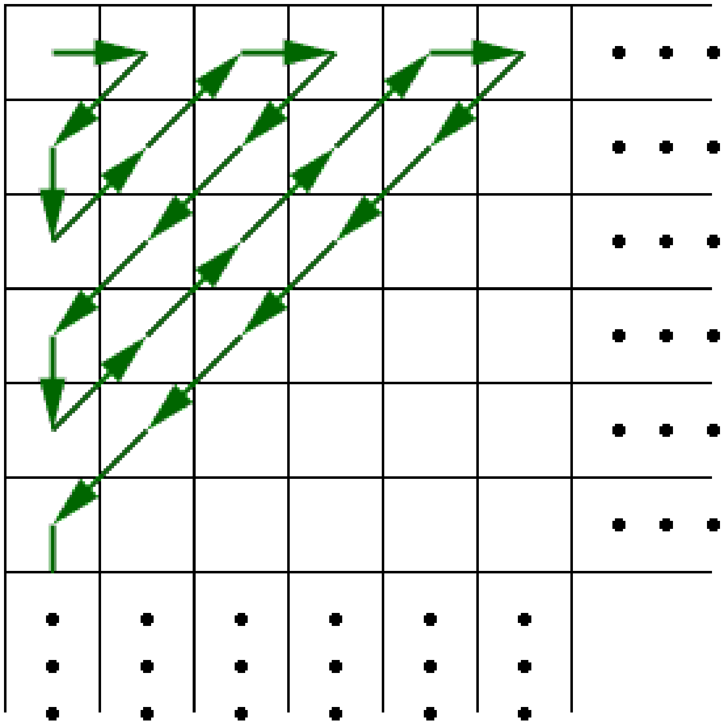
- 是否存在集合的基数在$\aleph_0$和$2^{\aleph_0}$之间？
- (Cantor) No.

  there is no λ with $\aleph_0 < \lambda < 2^{\aleph_0}$
- 即：任何不可数的实数集合都与全集$\mathbb{R}$等势。
- 一般形式：

> For any infinite cardinal κ, there is no cardinal number between κ and 2^κ
>
> ——Cantor

历史演进

- **1878年康托尔猜测在可列集基数和实数基数之间没有别的基数。**
- **1900年希尔伯特把连续统假设列入20世纪有待解决的23个重要数学问题之首。**
- **1938年哥德尔(Kurt Gödel)证明了连续统假设和ZFC公理系统不矛盾 ZFC $\vdash$ ¬CH**
- **1963年美国数学家科亨(Paul Cohen)证明连续假设和ZFC公理系统彼此独立 ZFC $\vdash$ CH**
- **因此，连续统假设不能在ZFC公理系统内证明其正确性与否.**



The End !

Xiaofeng Gao