



道路与回路

Path and Circuit

高晓汾 (Xiaofeng Gao)

Department of Computer Science
Shanghai Jiao Tong Univ.

目录

- 1 概念与性质
- 2 图的连通性
- 3 路与圈的相关定理
- 4 道路与回路的判定



道路与回路的定义

Definition of Path and Circuit

有向道路与有向回路

- ❖ **【定义】** 有向图 G 中边序列 $P=(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_q})$, 其中 $e_{i_j} = (v_k, v_l)$ 满足: v_k 是 $e_{i_{j-1}}$ 的终点, v_l 是 $e_{i_{j+1}}$ 的始点, 就称 P 是 G 的一条**有向道路**。如果 e_{i_q} 的终点也是 e_{i_1} 的始点, 则称 P 是 G 的一条**有向回路**.
- ❖ **简单有向道路/回路**: P 中边不重复出现.
- ❖ **初级有向道路/回路**: P 中结点不重复出现.

道路与回路

❖ 【定义】无向图 G 中,若点边交替序列

$$P = (v_{i_1}, e_{i_1}, v_{i_2}, e_{i_2}, \dots, e_{i_{q-1}}, v_{i_q})$$

满足: v_{i_j} 和 $v_{i_{j+1}}$ 是 e_{i_j} 的两个端点,则称 P 是 G 中的一条链或道路(path).如果 $v_{i_q} = v_{i_1}$,则称 P 是 G 中的一个圈或回路(circuit).

❖ 简单道路/回路: P 中没有重复出现的边.

❖ 初级道路/回路: P 中没有重复出现的结点.

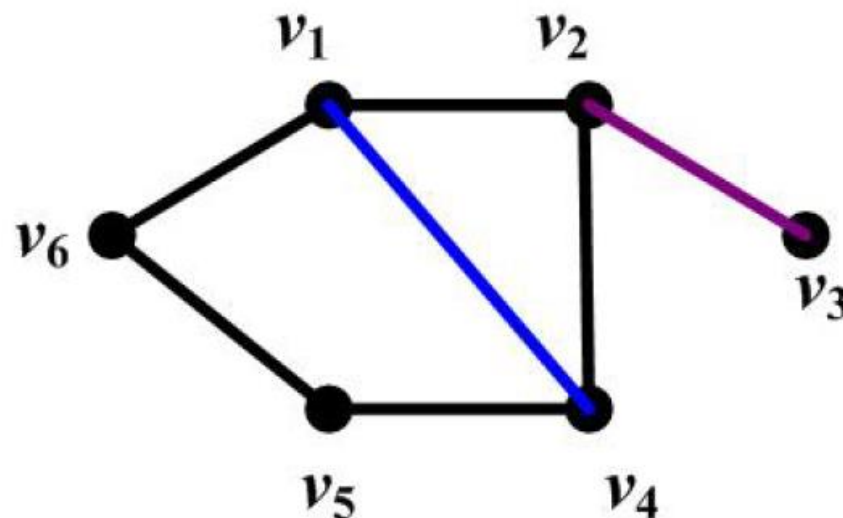
❖ 注: 道路又称通道; 回路又称闭通道(开通道即非回路的道路); 简单道路又称迹; 初级道路又称路、路径; 初级回路有时也称为圈。

其他定义

- ❖ 长度为奇数的圈（初级回路）称为奇圈；长度为偶数的圈（初级回路）成为偶圈。
- ❖ 在含圈的无向简单图 G 中，称 G 中最长圈的长度为 G 的周长，记做 $c(G)$ ， G 中最短圈的长度为 G 的围长，记做 $g(G)$ 。
- ❖ 无向完全图 K_n ($n \geq 3$)的周长为 n ，围长为3。
完全二部图 $K_{n,n}$ ($n \geq 2$)的周长为 $2n$ ，围长为4。

简单图中的弦

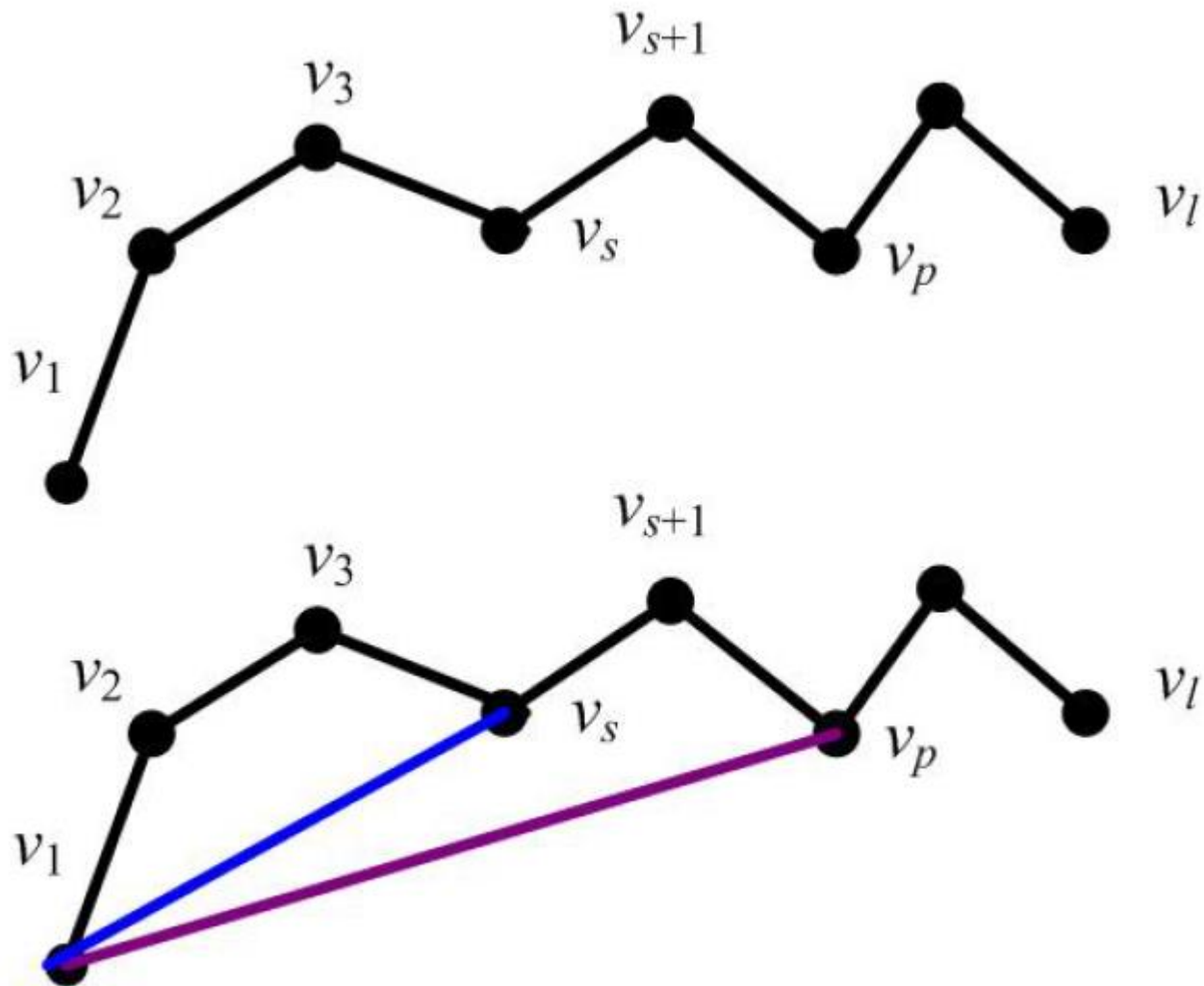
- ❖ 【定义】 设 C 是简单图 G 中含结点数大于3的一个初级回路。如果结点 v_i 和 v_j 在 C 中不相邻，而边 $(v_i, v_j) \in E(G)$ ，则称 (v_i, v_j) 是 C 的一条弦。
- ❖ 【定理】 若对每一个 $v_k \in V(G)$ ，都有 $d(v_k) \geq 3$ ，则 G 中必含带弦的回路。



证明

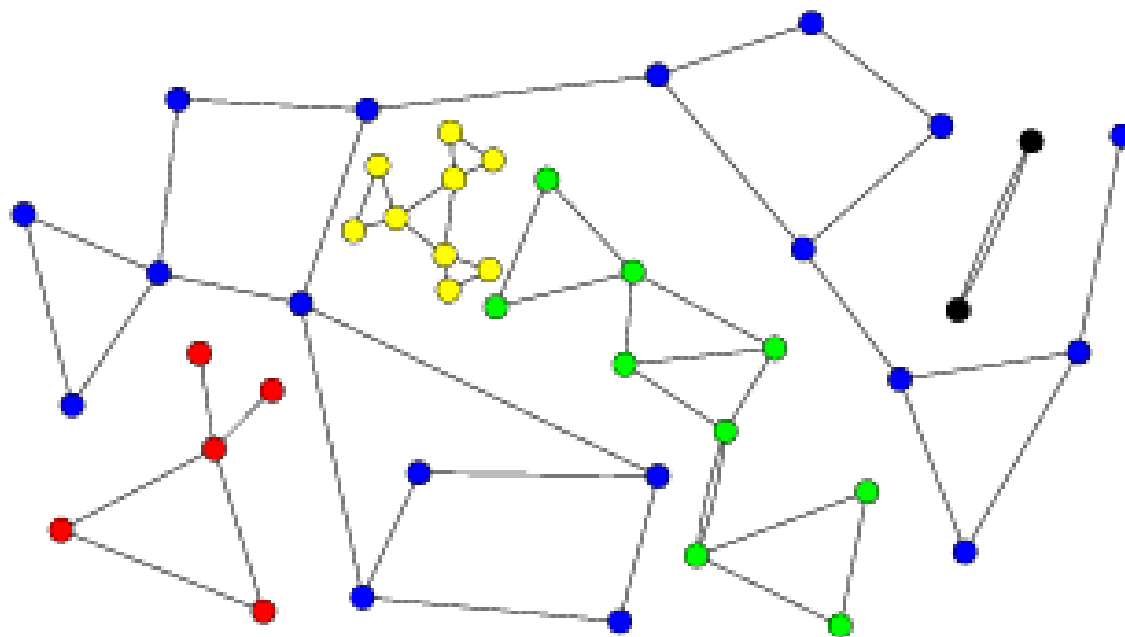
- ❖ 在 G 中找到一条极长的初级道路
 $P=(e_1, e_2, \dots, e_l)$ 。不妨设 $e_1=(v_1, v_2)$, $e_i=(v_i, v_{i+1})$ 。
- ❖ 由于 P 是极长的初级道路, 所以 v_1 和 v_l 的邻接点都在该道路上。
- ❖ 由已知条件, $d(v_1) \geq 3$, 不妨设
 $\Gamma(v_1) = \{v_2, v_s, v_p, \dots\}$, 其中 $s < p$ 。
- ❖ 这时 $(v_1, \dots, v_s, \dots, v_p, \dots, v_1)$ 是一条初级回路, 而 (v_1, v_s) 就是该回路中的一条弦。

图例



二分图的回路

- ❖ 【定理】 如果二分图 G 中存在回路，那么它们都是由偶数条边组成的。
- ❖ 【证明】 设二分图 G 将 $V(G)$ 分为 X , Y 两个点集（二分点集），设 C 是二分图 G 的任一回路，不妨设 $v_0 \in X$ 是 C 的起点，由于 G 是二分图，所以沿回路 C 必须经过偶数条边才能达到某结点 $v_i \in X$ ，因而只有经过偶数条边才能回到 v_0 。



图的连通性

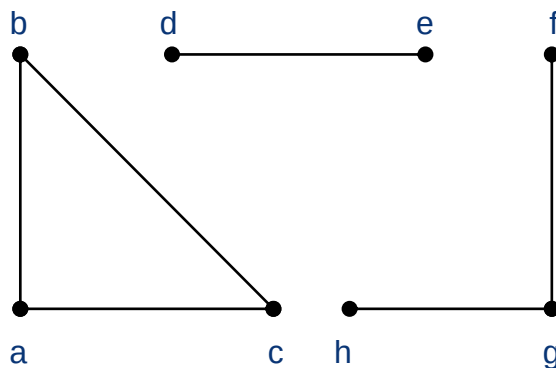
Connectivity of the Graph

连通性

- ❖ 若无向图 G 的任意两个结点之间都存在道路,就称 G 是**连通的**(connected).
- ❖ 对有向图 G ,若不考虑边的方向时是连通的,则称 G 是**(弱)连通**的.
- ❖ 若 G 的连通子图 H 不是 G 的任何连通子图的真子图,则称 H 是 G 的**极大连通子图**,或称**连通分支**(connected component).
 - 显然 G 的每个连通分支都是它的导出子图.
 - 任何非连通图都是2个以上连通支的并
 - 连通分支又称连通支、连通分量。

连通分量 (Connected Component)

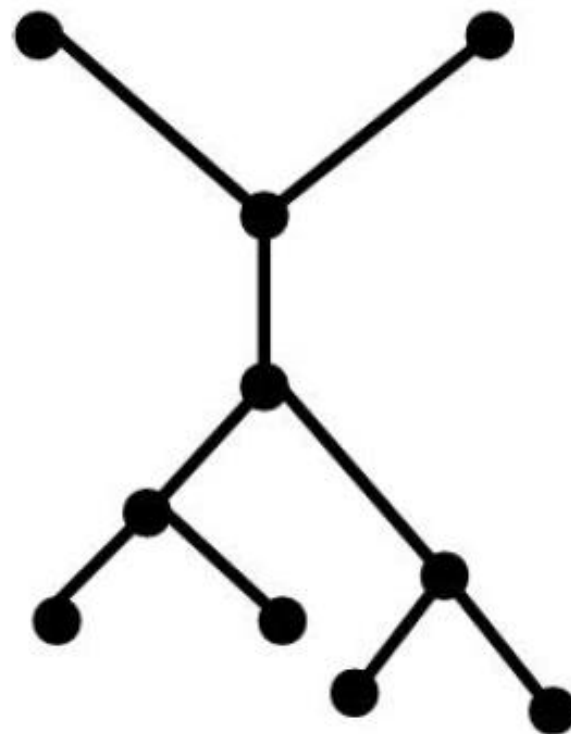
【例】指出下图的连通分量。



【解】根据定义，可以看出上图共有3个连通分量，分别为
 $(\{a,b,c\}, \{(a,b), (a,c), (b,c)\})$,
 $(\{d,e\}, \{(d,e)\})$,
 $(\{f,g,h\}, \{(h,g), (f,g)\})$ 。

特殊的连通图：树

- ❖ 如果连通图中不含回路，而且任意两个结点间都只有唯一的一条初级道路，则称该连通图为**树**。
- ❖ **树是边数最少的连通图。**



距离

【定义】 设 u, v 为图 G 中的任意两个顶点，若 u, v 连通，称设 u, v 之间长度最短的通道为 u, v 之间的短程线，短程线的长度称为 u, v 之间的距离，记做 $d(u, v)$ ，当 u, v 不连通时，定 $d(u, v) = \infty$ 。

连通图性质

【例】 设 $G=(V,E)$ ($|V|=n, |E|=m$) 是简单图, 证明当 $m > \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ 时, G 是连通图。

假定 G 是非连通图, 则 G 至少含有两个连通分量, 设分别为 $G_1=(V_1, E_1)$, $G_2=(V_2, E_2)$, $|V_1|=n_1, |V_2|=n_2, n_1+n_2=n$, 由 G 是简单图知:

$$|E_1| \leq \frac{1}{2}n_1(n_1-1), |E_2| \leq \frac{1}{2}n_2(n_2-1),$$

假设 $m \leq \frac{1}{2}n_1(n_1-1) + \frac{1}{2}n_2(n_2-1)$, 由于 $n_1 \leq n-1, n_2 \leq n-1$,

$$\text{因此 } m \leq \frac{1}{2}(n-1)(n_1-1+n_2-1) = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

与已知矛盾, 故 G 是连通图.

连通图性质

【定理】 设 $G=(V, E)$ ($|V|=n, |E|=m$) 是连通图, 则 $m \geq n-1$

【证】 若 G 为简单图时, G 连通必有 $m \geq n-1$; 当 G 为非简单图时, G 连通更要要求 $m \geq n-1$, 下面仅就 G 为简单图时加以证明。

对顶点数 n 作归纳法。

$n=1$ 时, G 为平凡图, 此时 $m=0$, 所以结论成立。

证明

- ❖ 设 $n \leq k$ ($k \geq 1$) 时结论成立，下面证明 $n=k+1$ 时结论成立。
- ❖ 设 v 为 G 中任意一个顶点，记 $G'=G-v$ ，设 G' 有 s 个连通分量 $G_1, G_2, \dots, G_s$ ，设 $|V_i|=n_i$ ， $|E_i|=m_i$ ($i=1, 2, \dots, s$)，则 $n_i \leq k$ 。由归纳假设可知 $m_i \geq n_i - 1$ ，由于从 G 中删除 v 产生 s 个连通分支，所以至少同时删除了 s 条边，于是

$$m \geq \sum_{i=1}^s m_i + s \geq \sum_{i=1}^s n_i - s + s = \sum_{i=1}^s n_i = n - 1$$



路与圈的相关定理

Theorems and Properties of Path and Circuit

通道长度定理

【定理】 设 $G=(V, E)$ ($|V|=n$), 若顶点 u 和 v ($u \neq v$) 之间若有通道, 则它们之间存在长度小于 n 的通道。

【证】 设 $W=v_0e_1v_1\dots e_kv_k$ 为 G 中长度为 k 的通道, 且始点 $v_0=u$, 终点 $v_k=v$ 。
若 $k < n$, 则 W 为满足要求的通道;

证明

- ❖ 否则若 $k \geq n$, 或 $k > n+1$, 即 W 上顶点数大于 G 中的顶点数, 必存在 s 和 t ($0 \leq s < t \leq k$), 使得 $v_s = v_t$;
- ❖ 即在 W 中存在到自身的闭通道 C_{st} , 在 W 中删除 C_{st} 中的一切边和除外 v_s 的所有顶点, 得到 W' , 则 W' 仍然为顶点 u 到 v 的通道, 且 W' 的长度比 W 至少减少1。
- ❖ 则若 W' 的长度小于 n , 则 W' 满足要求, 否则对重复上述过程, 因为 G 是有限图, 经过有限步后, 必得 u 到 v 长度小于 n 的通道。

通道与路相关定理推论

- ❖ **【推论】** 图 $G=(V, E)$ ($|V|=n$)中, 若顶点 u 和 v ($u \neq v$)之间有通道, 则它们之间存在长度小于 n 的路。
- ❖ **【证明】** 由之前定理知, u 和 v 存在长度小于 n 的通道 W , 若 W 已经是路, 则 W 满足要求; 否则必存在若干个始点(终点)在 W 上的闭通道, 删除这些闭通道上除始点(终点)外的一切顶点和所有边, 其结果 W' 为 u 和 v 的长度小于 n 的路。

通道与路相关定理推论 (2)

- ❖ 【定理】 图 $G=(V, E)$ ($|V|=n$)中, 若存在顶点 u 到自身的闭通道, 则一定存在 u 到自身的长度小于等于 n 的闭通道。
- ❖ 【证明】 类似之前定理, 设 $W=v_0e_1v_1\dots e_kv_0$ 为 G 中长度为 k 的闭通道, 若 $k < n$, 则 W 为满足要求的闭通道; 若 $k \geq n$, 找到相同的 v_s 和 v_t ($s=t \neq 0$), 并删除闭圈 C_{st} 中的一切边和除外 v_s 的所有顶点。重复该过程直至 W' 满足要求为止。

通道与路相关定理推论 (3)

- ❖ **【推论】** 图 $G=(V, E)$ ($|V|=n$)中, 若存在顶点 u 到自身的闭迹, 则一定存在 u 到自身的长度小于等于 n 的闭迹。
- ❖ **【证明】** 由之前定理知, u 和 v 存在长度小于 n 的闭通道 W , 若 W 已经是闭迹, 则 W 满足要求; 否则必存在若干个始点 (终点) 在 W 上的闭通道, 删除这些闭通道上除始点 (终点) 外的一切顶点和所有边, 其结果 W' 为 u 和 v 的长度小于 n 的闭迹。

扩大路法

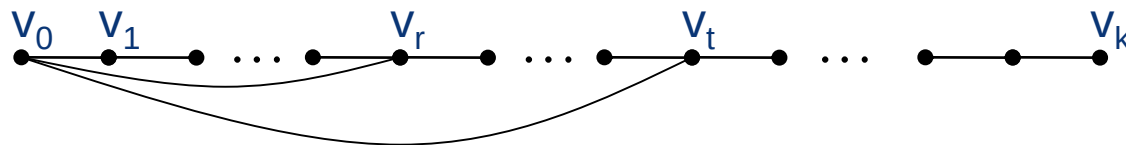
- ❖ 图论中很有用的证明方法:
- ❖ 设为 $G=(V, E)$ 为 n 阶无向图, $E \neq \emptyset$, 设 Γ_k 为 G 中一条路, 若此路的始点或终点与通道外的顶点相邻, 就将它们扩到通道中来, 继续这一过程, 直到最后得到的通道的两个端点不与通道外的顶点相邻为止, 设最后得到的路径为 Γ_{k+r} (长度为 k 的路扩大成了长度为 $k+r$ 的路径), 称 Γ_{k+r} 为“极大路”, 称使用此种方法证明问题的方法为“扩大路法”。

范例

- ❖ **【例】** 设 G 为 n ($n \geq 4$)阶无向简单图, G 中任何一个顶点的度数均不小于3。证明 G 中存在长度大于或等于4的圈。
- ❖ **【证】** 不妨设 G 是连通图, 否则, 因为 G 的各连通分支的最小度($\min\{d(v) | v \in V\}$)也都大于或等于3, 因而可对它的某个连通分支进行讨论。
- ❖ 设 u, v 为 G 中任意两个顶点, 由 G 是连通图, 因而 u, v 之间存在通道, 由推论可知, u, v 之间存在路, 用“扩大路法”扩大这条路,

证明

❖ 设最后得到的“极大路”为 $\Gamma_k = v_0 v_1 \dots v_k$ ，易知 $k \geq 3$ ，若 v_0 与 v_k 相邻，则 $\Gamma_k = v_0 v_1 \dots v_k \cup (v_0, v_k)$ 为长度大于或等于4的圈。若 v_0 与 v_k 不相邻，由于 $d(v_0) \geq 3$ ，因而 v_0 除与 Γ_k 上的 v_1 相邻外，还存 Γ_k 上的顶点 $v_r (2 \leq r < k)$ 和 $v_t (r < t < k)$ 与 v_0 相邻，则 $\Gamma_k = v_0 v_1 \dots v_r \dots v_t v_0$ 为一个圈且长度大于或等于4，见下图所示。



二部图与圈

- ❖ 【定理】 一个图为二部图当且仅当图 G 中无奇圈。
- ❖ 必要性。

设二部图 $G=(V_1, V_2, E)$ ，若 G 中无圈，结论成立，否则，设 C 为 G 中任意一个圈，设 $C=u_1u_2\dots u_{k-1}u_ku_1$ 。不妨设 $u_1 \in V_1$ ，则 $u_3, u_5, \dots, u_{k-1}$ 均属于 V_1 ，而 $u_2, u_4, \dots, u_k$ 均属于 V_2 ，于是 k 是偶数，且 k 是 C 的长度，因而 C 是偶圈，由于 C 的任意性，结论成立。

证明

- ❖ 充分性。
- ❖ 设 G 中无奇圈，不妨设 G 是连通的，否则可对它的每个连通分量进行讨论。设 u 为 G 中任意一个顶点，令

$$V_1 = \{v \mid v \in V(G) \wedge d(u, v) \text{ 为偶数} \}$$

$$V_2 = \{v \mid v \in V(G) \wedge d(u, v) \text{ 为奇数} \}$$

则 $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ 且 $V_1 \cup V_2 = V$

- ❖ 下面只要证明 $\forall e \in E$ ， e 的一个端点在 V_1 中，另一个端点在 V_2 中。

证明

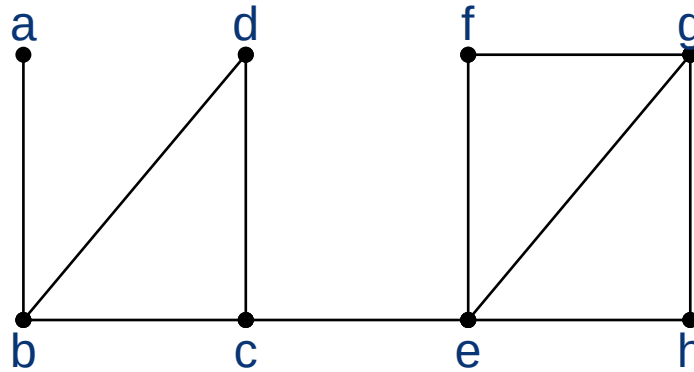
- ❖ 若不然，存在边 $e=(u_r, u_s)$ ，其中 u_r, u_s 均属于 V_1 (或者 V_2)，设 W_{u,u_r} 和 W_{u,u_s} 分别为 u 到 u_r 和 u 到 u_s 到的短程线，显然 W_{u,u_r} 和 W_{u,u_s} 的长度均为偶数。
- ❖ 如果 W_{u,u_r} 和 W_{u,u_s} 无交点，则 $W_{u,u_r} \cup (u_r, u_s) \cup W_{u,u_s}$ 为图 G 中一个奇圈，这与 G 中无奇圈矛盾。如果 W_{u,u_r} 和 W_{u,u_s} 有交点，则由于 $W_{u,u_r} \cup (u_r, u_s) \cup W_{u,u_s}$ 的长度为奇数，易知其中必含图 G 的奇圈，仍得出矛盾。证毕。

割点、割边与桥

- ❖ 如果移除某个顶点及所有与该顶点相关联的边所产生的子图比原图有更多的连通分量，这样的顶点称为**割点**。显然，从一个连通图中移除一个割点就会产生一个不连通的子图。
- ❖ 类似地，将一条边移除后所产生的子图比原图有更多的连通分量，这样的边称为**割边**或**桥**。

范例

【例】 指出下图中的割点和桥。



割点为： b, c和e

桥： {a, b}和 {c, e}



Thank You !

Xiaofeng Gao